Chapitre 9

Fonction logarithme

Les savoir-faire

90. Connaître le sens de variation, le signe, les limites, et la courbe représentative de la fonction ln.

91. Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture.

92. Calculer des limites de fonctions logarithmes.

93. Résoudre des équations ou des inéquations contenant des logarithmes.

94. Dériver des fonctions contenant des logarithmes.

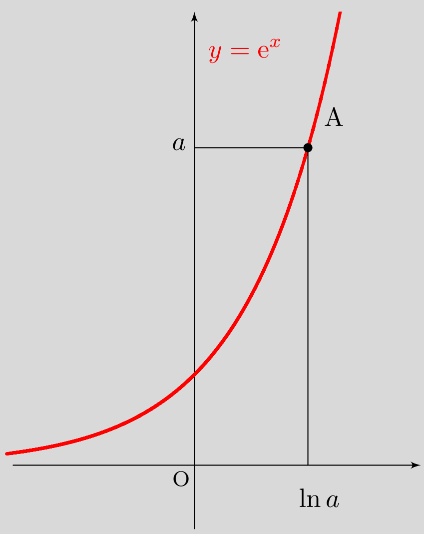
I. Définition de la fonction logarithme népérien

1. Définition

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel $a > 0$, l'équation $\mathrm{e}^x = a$ admet une unique solution notée $\ln(a)$.
On peut définir une nouvelle fonction qui à tout réel strictement positif, associe son unique antécédent par la fonction exponentielle.

Définition

La fonction définie sur $]0; +\infty[$ qui à tout réel $x > 0$, associe le nombre $\ln x$ est appelée la fonction logarithme népérien et est notée $\ln a$.



2. Conséquences

Conséquences

— $\mathrm{e}^0 = 1 \iff \ln(1) = 0$;

— $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \iff \ln(\mathrm{e}) = 1$;

— Pour tout réel $a > 0$, l'équation $\mathrm{e}^x = a$ a pour unique solution $x = \ln(a)$.

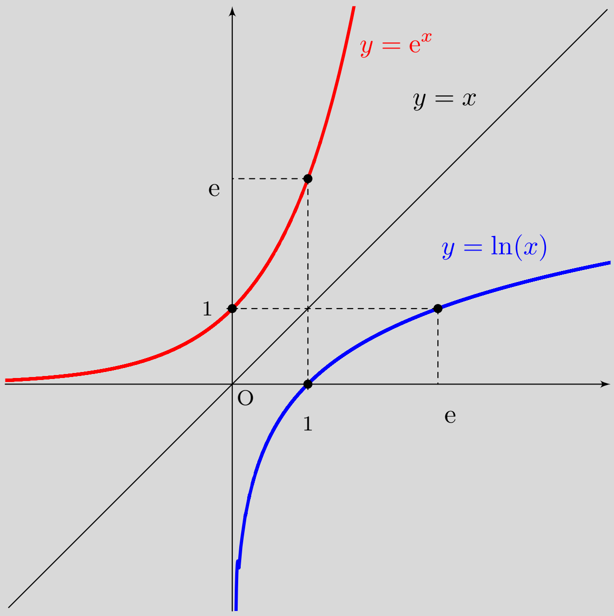
Propriétés

- Pour tout réel $x > 0$: $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\ln(\mathrm{e}^x) = x$.
- Pour tous réels $x > 0$ et y : $y = \ln(x) \Longleftrightarrow x = \mathrm{e}^y$.

3. Courbe représentative

Propriété

Dans un repère orthonormé, la courbe représentant la fonction ln est la symétrique de la courbe représentant la fonction exp par rapport à la droite d'équation $y = x$.
On dit que la fonction logarithme népérien est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.



4. Relations fonctionnelles

Propriété fondamentale

Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$:

$$\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$$

Propriétés

Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$ et tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \quad ; \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$$\ln(x^n) = n\ln(x) \quad ; \quad \ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\ln(x)$$

Exemples :
Simplifier les expressions suivantes :
$A = \ln(3 - \sqrt{5}) + \ln(3 + \sqrt{5})$
$B = 3\ln 2 + \ln 5 - 2\ln 3$; $C = \ln \mathrm{e}^2 - \ln \frac{2}{\mathrm{e}}$ Vidéo

II. Étude de la fonction logarithme népérien

1. Variations, limites

Dérivée

La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc continue sur $]0;+\infty[$. Pour tout réel $x>0$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}>0$ donc la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Conséquences

Pour tous réels $a>0$ et $b>0$:

$\ln(a)=\ln(b) \Longleftrightarrow a=b$; $\ln(a)<\ln(b) \Longleftrightarrow a<b$

Limites

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$; $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$

Exemples :

1. Résoudre : **a.** $\ln x=2$. **b.** $\mathrm{e}^{x+1}=5$. Vidéo

c. $\ln(x-3)+\ln(9-x)=0$. Vidéo

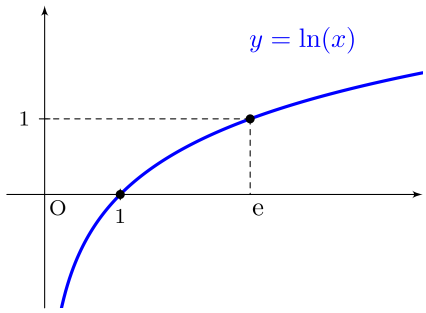
2. Résoudre : **a.** $\ln(6x-1)\geqslant 2$. **b.** $\mathrm{e}^{x}+5>4\mathrm{e}^{x}$. Vidéo

3. Dériver les fonctions suivantes :

$f(x)=x^3\ln x$ $\quad g(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{x}$ Vidéo

2. Bilan

x	0		1		$+\infty$
$\ln'(x)$	$\|$		$+$		
ln	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



x	0		1		$+\infty$
Signe de $\ln(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	

III. Compléments sur la fonction logarithme

Dérivée

Soit u une fonction dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I.
La fonction $\ln\circ u$ est dérivable sur I et admet pour dérivée :

$$(\ln(u))'=\frac{u'}{u}$$

Exemples :

Dériver les fonctions suivantes :

$f(x)=\ln(2x-x^2)$ $\quad g(x)=x\ln(x^2+1)$ Vidéo

Croissances comparées

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+ \qquad ; \qquad \lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0^-$$

Exemples :

Calculer :

$\lim_{x \to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1}$ Vidéo

$\lim_{x \to +\infty} (x - \ln x)$ Vidéo

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x-1}$ Vidéo