Lycée Louise Michel 05/02/21

Terminale

MATHÉMATIQUES
Devoir surveillé (2 heures)

Exercice 1 (7 points)

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.
On considère les points $A(1\,;\,0\,;\,2)$, $B(0\,;\,2\,;\,-1)$, $C(0\,;\,0\,;\,3)$ et $E(-1\,;\,2\,;\,-3)$.

$\mathscr{D}$ est la droite dirigée par $\overrightarrow{d}\begin{pmatrix}-2\\3\\-4\end{pmatrix}$ et qui passe par E.

Δ est la droite dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2+u\\ y &=& -6+2u\\ z &=& 2+3u\end{array}\right.\qquad (u\in\mathbb{R})$

1. a. Montrer que les points A, B et C définissent un plan $\mathscr{P}$.

b. Déterminer les nombres a et b tel que $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\3\end{pmatrix}$ soit un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

c. En déduire une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.

2. Donner une représentation paramétrique de $\mathscr{D}$, puis prouver que $\mathscr{D}$ et Δ sont coplanaires.

3. a. Montrer que $\vec{d}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

b. Montrer que le point E n'appartient pas à $\mathscr{P}$.

c. Que peut-on en déduire concernant la position relative de la droite $\mathscr{D}$ et du plan $\mathscr{P}$? Justifier.

Exercice 2 (8 points)

Pour tout réel a strictement positif, on définit sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ la fonction g_a par :

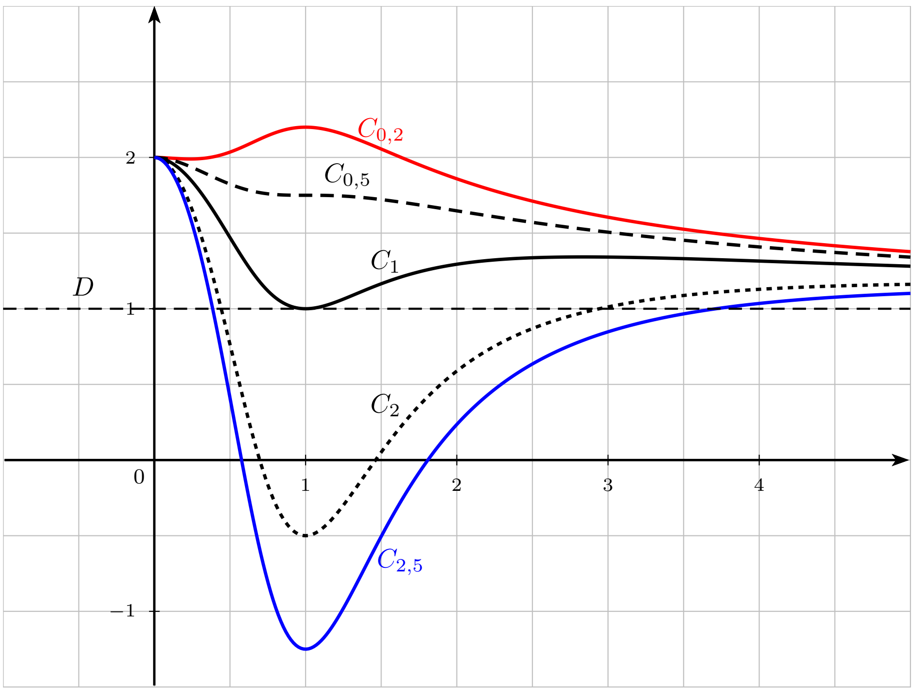
$$g_a(x) = \frac{x^4 + 2x^3 - 3ax^2 + 2}{x^4 + 1}$$

On note C_a la courbe représentative de la fonction g_a dans un repère du plan.

- Partie A -

1. Démontrer que la droite D d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe C_a.

2. On a construit dans le repère ci-dessous les courbes $C_{0,2}$, $C_{0,5}$, C_1, C_2 et $C_{2,5}$ et la droite D.
Emettre une conjecture sur le nombre de point(s) d'intersection de C_a et de D, suivant les valeurs de a.



- Partie B -

On considère la fonction h_a définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $h_a(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 1$.

1. Justifier que x est l'abscisse du point d'intersection de C_a et de D si et seulement si $h_a(x) = 0$.

2. Justifier toutes les données (sens de variation, valeurs remarquables, limite en $+\infty$) figurant dans le tableau de variation de la fonction h_a, donné ci-dessous :

x	0	a	$+\infty$
$h_a(x)$	1 ↘	$-a^3+1$	↗ $+\infty$

3. Dans cette question, on suppose $a = 2,5$.

a. Démontrer que l'équation $h_{2,5}(x) = 0$ admet une unique solution α_1 sur $[0\ ;\ 2,5]$.

b. On admet que l'équation $h_{2,5}(x) = 0$ admet une autre solution α_2 sur $[2,5\ ;\ +\infty[$.
Donner des valeurs approchées de α_1 et α_2 à 10^{-2} près. Que représentent ces valeurs dans le contexte de l'exercice ?

4. Dresser le tableau de signes de $-a^3 + 1$ sur $[0\ ;\ +\infty[$ (aucune justification n'est attendue).
Que peut-on en déduire concernant le nombre de point(s) d'intersection de C_a et D ? Justifier

Exercice 3 (5 points)

On s'intéresse à la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -2(x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

Partie A

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

2. Justifier que $f'(x) = 2(x+1)\mathrm{e}^{-x}$ où f' est la fonction dérivée de f.

3. En déduire les variations de la fonction f.

Partie B

Dans le repère orthogonal ci-dessous trois courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ ont été représentées.
L'une de ces courbes représente la fonction f, une autre représente sa dérivée et une troisième représente sa dérivée seconde.
Expliquer comment ces représentations graphiques permettent de déterminer la convexité de la fonction f.
Indiquer un intervalle sur lequel la fonction f est convexe.