MATHEMATIQUES
Intégration : entraînement 1 (corrigé)

Exercice 1

1. Le tableau de variation de la fonction F sur $[0,5\ ;\ +\infty[$ est :

x	0,5		1		$+\infty$
$F(x)$		↘		↗	
$F'(x) = f(x)$		$-$	0	$+$	

Explications

Faites attention, c'est la fonction F qui est représentée (pas f). Les variations de F donne le signe de sa dérivée qui n'est autre que f (rappelez-vous $F' = f$).

2.
- $f(1) = F'(1) = 0$.
- $F(1) = -2$ (car le point de coordonnées $(1\ ;\ -2) \in \mathscr{C}_F$).
- $F(3) = 0$ (car le point de coordonnées $(3\ ;\ 0) \in \mathscr{C}_F$).

- $f(3) = F'(3)$.

D'après le tableau de signes de f ci-dessus, $f(3) > 0$ (la fonction F est strictement croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$).

Pensez-y !

Dans cet exercice, on n'a que la représentation graphique de F. Pour avoir $f(1)$, on utilise le lien qu'il y a entre F et f : $F'(x) = f(x)$.
Ainsi, $F'(1) = f(1)$. Ce nombre est le coeffcient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_F$ au point d'abscisse 1 : c'est 0 car la tangente est horizontale en ce point.
Pour $F(1)$ et $F(3)$, on utilise les coordonnées des points donnés dans l'énoncé.

3. $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = F(3) - F(1) = 0 - (-2) = 2.$

Exercice 2

1. $\displaystyle\int_0^1 3\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$

On pose $f(x) = \underbrace{3}_{u'(x)}\underbrace{\mathrm{e}^{3x}}_{\mathrm{e}^{u(x)}}$.

Une primitive F de f est définie par : $F(x) = \mathrm{e}^{3x}$.

A reconnaître

Cette forme $u'\mathrm{e}^u$ est à reconnaître ! Si $f = u'\mathrm{e}^u$, alors $F = \mathrm{e}^u$.

- $F(1) = \mathrm{e}^{2\times 1} = \mathrm{e}^3$.
- $F(0) = \mathrm{e}^{3\times 0} = \mathrm{e}^0 = 1$.

$$\int_0^1 3\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = \underbrace{\mathrm{e}^3 - 1}_{\text{Valeur exacte}} \simeq \overbrace{19,09}^{\text{Valeur approchée}}$$

Réponse **a.**

Calculatrice

Avec la calculatrice :

Attention, la calculatrice ne fournit qu'une valeur approchée de cette intégrale. Les réponses proposées sont des valeurs exactes. Soyez prudent : la réponse proposée 19,1 n'est pas la bonne réponse car il n'y a que des valeurs exactes qui sont proposées et 19,1 est une valeur approchée.

2. $f(x) = \mathrm{e}^{2x} = \underbrace{1}_{\substack{\text{c'est presque}\\ u'(x)}} \times \mathrm{e}^{\overbrace{2x}^{u(x)}}$.

$u(x) = 2x$ donc $u'(x) = 2$.

Explications

Vous devez avant tout reconnaître (ou faire apparaître) la forme $u'\mathrm{e}^u$ qui n'est autre que la dérivée de e^u. Donc une primitive de $u'\mathrm{e}^u$ est e^u.

On a : $f(x) = 1 \times \mathrm{e}^{3x} = \underbrace{\frac{1}{2} \times \underbrace{2}_{u'(x)}}_{\frac{1}{2}\times 2 = 1} \times \ \mathrm{e}^{\overbrace{2x}^{u(x)}}$ On transforme l'écriture de $f(x)$ pour obtenir la forme $u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.

Ainsi, $f = \frac{1}{2} \times \underbrace{u'\mathrm{e}^u}_{\substack{\text{Forme à}\\ \text{faire apparaître}}}$ dont une primitive est $F = \frac{1}{2} \times \mathrm{e}^u$.

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$.

$F(1) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\times 1} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^2$.

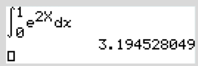
$F(0) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\times 0} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \frac{1}{2} = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathrm{e}^2 - 1)}_{\text{Valeur exacte}} \simeq \overbrace{3,19}^{\text{Valeur approchée}}$

Réponse **d.**

Calculatrice

Avec la calculatrice :



Attention encore une fois, la calculatrice ne fournit qu'une valeur approchée de cette intégrale. Les réponses proposées sont des valeurs exactes. Soyez prudent : la réponse proposée 3,19 n'est pas la bonne réponse car ce n'est pas la valeur exacte.

3. Sur l'intervalle $[-1\ ;\ 7]$, la fonction f est négative.

On en déduit que $\displaystyle\int_{-1}^{7} f(x)\,\mathrm{d}x$ est strictement négative.

Réponse **b.**

Remarque

Quand la fonction f est négative, l 'intégrale de la fonction f entre a et b est égale à l'opposé de l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}_f$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\mathscr{A}$$

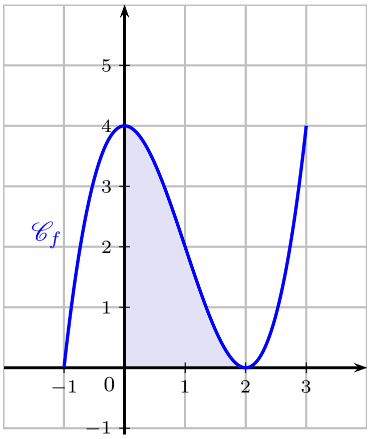
4. Prenons les propositions une par une :

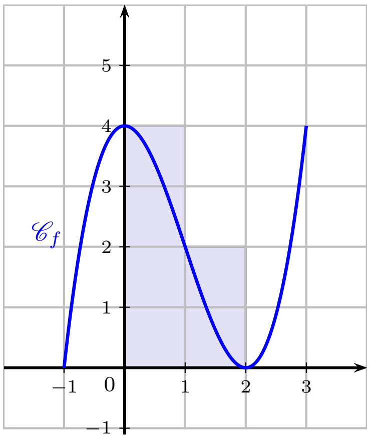
- $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x < 0$.

Sur $[-1\ ;\ 0]$, la fonction f est positive (sa courbe se situe au dessus de l'axe des abscisses), donc $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x > 0$.

Cette affirmation est fausse.

• $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ représente l'aire entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$.



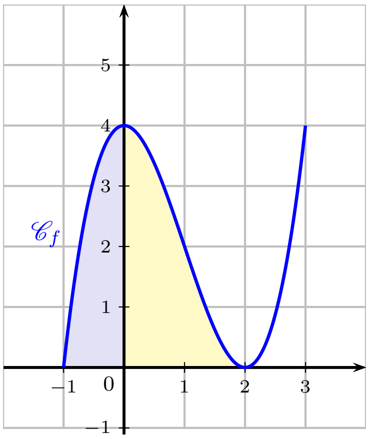


Sur le deuxième graphique, on peut voir que cette aire est comprise entre 3 u.a et 6 u.a. On peut déduire donc :

$$3 < \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x < 6$$

Remarque
Comptez le nombre de carreaux pour encadrer l'aire sous la courbe (1 carreau = 1 unité).

• $\displaystyle\int_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$



• Dire que la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0\,;\ 2]$ est égale à 1 signifie $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ soit $\displaystyle\int_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$. Ce qui est faux puisque $\displaystyle 3 < \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x < 6$.

Réponse **b.**

5. Prenons les propositions une par une :

• f' est croissante sur $]-1\ ;\ 2[$ signifie graphiquement que f est convexe sur $]-1\ ;\ 2[$. Ce qui n'est pas le cas.

• F est croissante sur $]-1\ ;\ 2[$ car sa dérivée (la fonction f, celle qui est représentée) est positive sur $]-1\ ;\ 2[$.

• f est croissante sur $]-1\ ;\ 0]$ et décroissante sur $[0\ ;\ 2[$, donc f n'est pas croissante sur $]-1\ ;\ 2[$.

• Puisque F est croissante sur $]-1\ ;\ 2[$, elle conserve l'ordre.
Comme $1 < 2$, on a $F(1) < F(2)$.

Réponse **b.**

Exercice 3

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, alors une primitive F de f sur $]0\ ;\ +\infty[$ est définie par $F(x) = \ln x$.

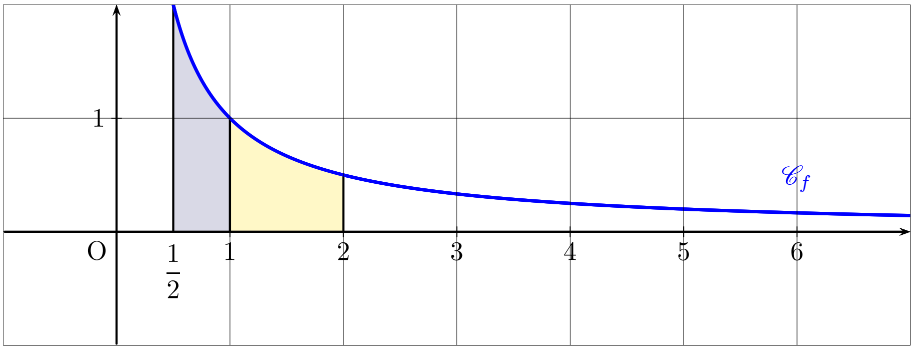
Ainsi, $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = F(2) - F(1) = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.

Et $J = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 1 - \ln\frac{1}{2} = -(-\ln 2) = \ln 2$.

A connaître

- $\ln 1 = 0$.
- $\ln\dfrac{1}{a} = -\ln a$ (propriété de la fonction ln à connaître.)

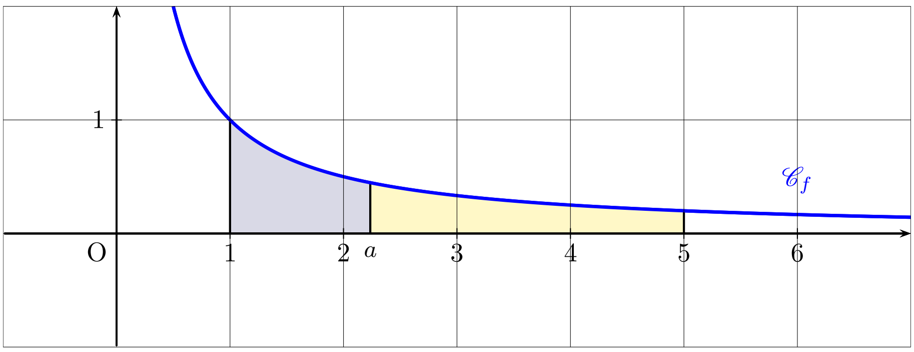
On a bien $I = J$. Graphiquement, les deux surfaces ci-dessous ont la même aire :



2. Le réel a vérifie $\displaystyle\int_1^a \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_a^5 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.
Cette égalité se traduit par :

$$\begin{array}{rcll}
\ln a - \ln 1 & = & \ln 5 - \ln a & \\
\ln a + \ln a & = & \ln 5 & \text{On isole } \ln a \\
2\ln a & = & \ln 5 & \\
\ln a & = & \dfrac{\ln 5}{2} & \\
\ln a & = & \ln \mathrm{e}^{\frac{\ln 5}{2}} & X = \ln \mathrm{e}^X \\
a & = & \mathrm{e}^{\frac{\ln 5}{2}} & \ln X = \ln Y \iff X = Y
\end{array}$$

La valeur exacte de a est $\mathrm{e}^{\frac{\ln 5}{2}}$. Une valeur approchée est 2,236.



Exercice 4

Partie A :

1. a. f est dérivable sur $[0;+\infty[$, et

$$f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$$

Mais sur $[0;+\infty[$, $\ln(x+1) \geqslant 0$ et $\dfrac{x}{x+1} \geqslant 0$, donc $f'(x) \geqslant 0$.
Ainsi f est croissante sur $[0;+\infty[$.

Simple

Une somme de fonctions positives sur un intervalle donne une fonction positive sur cet intervalle. Inutile d'en faire plus !

b. Comme $f'(0) = 0$ et $f(0) = 0$, alors la tangente au point d'abscisse 0 est $y = 0$, c'est à dire l'axe des abscisses.

2. a. Déterminons les réels a, b et c tels que pour tout réel $x \neq -1$:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1} &\iff x^2 = (ax+b)(x+1) + c \\ &\iff x^2 = ax^2 + (a+b)x + b + c\end{aligned}$$

Donc $\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$

Ainsi pour tout réel $x \neq -1$:

$$\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

b. Ainsi

$$\begin{aligned} I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 - x + \ln(x+1)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - 1 + \ln(1+1) = -\frac{1}{2} + \ln 2 \end{aligned}$$

3. Or sur $[0;+\infty[$, $x \geqslant 0$ et $\ln(x+1) \geqslant 0$, alors f est positive sur $[0;+\infty[$, donc l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$ est :

$$\mathcal{A} = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Intégrons par parties :

$$\begin{array}{ll} u'(x) = x & u(x) = \dfrac{1}{2}x^2 \\ v(x) = \ln(x+1) & v'(x) = \dfrac{1}{x+1} \end{array}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x+1)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\mathrm{I} \\ &= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \ln 2\right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Partie B :

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$.

1.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 x^{n+1} \ln(x+1)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^n \ln(x+1)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(x^{n+1} \ln(x+1) - \int_0^1 x^n \ln(x+1) \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(x^n (x-1) \ln(x+1) \right) \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Mais sur $[0\,;1]$, $x^n \geqslant 0$, $x-1 \leqslant 0$ et $\ln(x+1) \geqslant 0$, donc $x^n(x-1)\ln(x+1) \leqslant 0$.
Donc

$$\int_0^1 \left(x^n (x-1) \ln(x+1) \right) \mathrm{d}x \leqslant 0 \text{ soit } u_{n+1} - u_n \leqslant 0$$

Ainsi la suite u est décroissante, comme de plus, u est minorée par 0 alors la suite u converge.

2. Sur $[0\,;1]$, $0 \leqslant \ln(x+1) \leqslant \ln 2$ puisque la fonction ln est croissante.
Donc sur $[0\,;1]$,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant x^n \ln(x+1) \leqslant x^n \ln 2 &\iff 0 \leqslant \int_0^1 x^n \ln(x+1)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n \ln(2)\,\mathrm{d}x \\ &\iff 0 \leqslant u_n \leqslant \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln 2 \right]_0^1 \\ &\iff 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1} \ln 2 \end{aligned}$$

Méthode

Pour obtenir une inégalité faisant intervenir une intégrale, une méthode consiste à déterminer une inégalité vérifiée par la fonction à intégrer. Et comme l'intégrale conserve l'ordre....

Or, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, donc (théorème des gendarmes), $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.