MATHEMATIQUES
Intégration : entraînement 2 (corrigé)

Exercice 1

1. Restitution organisée de connaissances
Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a\ ;\ b]$ et dont les dérivées sont continues.
Alors uv est dérivable et $(uv)' = u'v + uv'$.

Par conséquent, $u'v = (uv)' - uv'$ et ce sont des fonctions continues d'où :

$$\begin{aligned}
\int_a^b u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x &= \int_a^b [(uv)'(x) - u(x)v'(x)]\ \mathrm{d}x \\
&= \int_a^b (uv)'(x)\ \mathrm{d}x - \int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x \text{ (linéarité de l'intégrale)} \\
&= [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x \\
&= u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

2. On pose $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^x \sin x\ \mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^x \cos x\ \mathrm{d}x$.

a. Première méthode :

On pose $u'(x) = \mathrm{e}^x$ d'où $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = \sin x$ d'où $v'(x) = \cos x$.
u et v sont dérivables et leurs dérivées sont continues. On effectue une intégration par parties :
$\mathrm{I} = [\mathrm{e}^x \sin x]_0^\pi - \displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^x \cos x\ \mathrm{d}x = -\mathrm{J}$ donc $\mathrm{I} = -\mathrm{J}$.

Deuxième méthode :

On pose $u(x) = \mathrm{e}^x$ donc $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $w'(x) = \sin x$ d'où $w(x) = -\cos x$.
u' et w' sont continues. On intègre par parties :
$\mathrm{I} = [-\mathrm{e}^x \cos x]_0^\pi - \displaystyle\int_0^\pi -\mathrm{e}^x \cos x\ \mathrm{d}x = 1 + \mathrm{e}^\pi + \mathrm{J}$ donc $\mathrm{I} = 1 + \mathrm{e}^\pi + \mathrm{J}$.
On obtient le système :

$$\begin{cases} \mathrm{I} = -\mathrm{J} \\ \mathrm{I} = 1 + \mathrm{e}^\pi + \mathrm{J} \end{cases}$$

Par conséquent : : $\mathrm{I} = \dfrac{1}{2}(1 + \mathrm{e}^\pi)$ et $\mathrm{J} = -\dfrac{1}{2}(1 + \mathrm{e}^\pi)$

Exercice 2
Partie A

1. L'image de 0 par la fonction f_1 est : $f_1(0) = 0 + \mathrm{e}^{-0} = 1$.
Le point d'abscisse 0 sur la courbe $\mathcal{C}_1$, représentative de la fonction f_1, est le point de coordonnées $(0\ ;\ f_1(0))$, c'est à dire ici $(0\ ;\ 1)$. Le point A, de coordonnées $(0\ ;\ 1)$ est donc bien un point de la courbe $\mathcal{C}_1$.

2. La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$, en tant que somme et composée de fonctions dérivables sur **R**.
Sa dérivée est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f_1'(x) = 1 + \underbrace{(-1)\mathrm{e}^{-x}}_{u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}} = 1 - \mathrm{e}^{-x}$.

On a : $f_1'(x) \geqslant 0 \iff 1 - \mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$
$\iff 1 \geqslant \mathrm{e}^{-x}$
$\iff \mathrm{e}^0 \geqslant \mathrm{e}^{-x}$
$\iff 0 \geqslant -x$ car exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
$\iff x \geqslant 0$.

On en déduit donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Justifions maintenant les deux limites :

- en $+\infty$:

On pose $X = -x$. On a donc $\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^X$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \overbrace{(-x)}^{X} = -\infty \\ \lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0 \end{array}\right\} \text{Par composition, } \lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0 \end{array}\right\} \text{Par somme, } \lim\limits_{x \to +\infty} x + \mathrm{e}^{-x} = +\infty$$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty$.

- en $-\infty$:

Pour tout x on a : $f_1(x) = \mathrm{e}^{-x} \times (x\mathrm{e}^x + 1)$.

F.I

Par somme on est sur une F.I. L'idée est de factoriser par e^{-x} pour lever l'indétermination.
N'oubliez pas que $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x + 1 = 1 \text{ car } \lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty \end{array}\right\} \text{Par produit, } \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x}(x\mathrm{e}^x + 1) = +\infty$$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = +\infty$.

Partie B

1. a. Soit un entier naturel n non nul, et un réel x, choisi dans l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.
x étant dans l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ donc x est positif. La fonction exponentielle étant à valeurs strictement positives, on en déduit que e^{-nx} est également un nombre positif. La somme de deux nombres positifs étant elle-même positive, on en déduit que $f_n(x)$ est positif.

On a donc prouvé que pour tout entier naturel n, la fonction f_n est à valeurs positives sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

I_n est donc l'intégrale sur un intervalle d'une fonction positive sur cet intervalle, c'est donc l'aire (exprimée en unité d'aire) de la portion de plan délimitée par : l'axe des abscisses ; la courbe $\mathcal{C}_n$, représentative de f_n, et les droites verticales d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) et $x = 1$.

b. Sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, il semble que, plus n augmente, plus les courbes $\mathcal{C}_n$ semblent se rapprocher du segment d'équation $y = x$, chaque courbe semblant être en dessous de la courbe d'indice précédent.

On en déduit que les aires successives sous ces courbes doivent être de plus en plus petites, et donc que la suite (I_n) doit être décroissante.

Comme de plus il semble que les courbes « s'écrasent » sur le segment d'équation $y = x$, à la limite, l'aire sous la courbe devrait tendre vers l'aire sous le segment, c'est à dire $\dfrac{1}{2}$.

On peut donc émettre la conjecture que la suite converge vers $\dfrac{1}{2}$ en décroissant.

2. On a :

$$\begin{aligned}
I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 f_{n+1}(x)\ \mathrm{d}x - \int_0^1 f_n(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(f_{n+1}(x) - f_n(x)\right)\ \mathrm{d}x \quad \text{par linéarité de l'intégrale.} \\
&= \int_0^1 \left(x + \mathrm{e}^{-(n+1)x} - \left(x + \mathrm{e}^{-nx}\right)\right)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(x + \mathrm{e}^{-(n+1)x} - x - \mathrm{e}^{-nx}\right)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\cancel{x} + \mathrm{e}^{-(n+1)x} - \cancel{x} - \underbrace{\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{-(n+1)x}}_{\mathrm{e}^{-nx}}\right)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \mathrm{e}^{-(n+1)x}\left(1 - \mathrm{e}^{x}\right)\ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

On va maintenant en déduire le signe de cette différence. Pour tout entier n naturel non nul et pour tout x dans l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, le nombre $\mathrm{e}^{-(n+1)x}$ est strictement positif, car la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives.

De plus, si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors $\mathrm{e}^0 \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^1$ soit $1 \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}$.

Par conséquent, $1 - \mathrm{e}^x \geqslant 0$.

Le produit de deux nombres de signes contraires étant négatif, on vient de prouver que, pour tout entier n naturel non nul et pour tout x dans l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, le nombre $\mathrm{e}^{-(n+1)x}\left(1 - \mathrm{e}^x\right)$ est négatif.

L'intégrale entre deux bornes bien rangées d'une fonction négative étant négative, on en déduit que, pour tout entier n non nul, la différence $I_{n+1} - I_n$ est négative. On en déduit que la suite (I_n) est décroissante.

Comme par ailleurs, on a déjà prouvé que, pour tout n naturel non nul, la fonction f_n est à valeurs positives sur l'intervalle d'intégration $[0\ ;\ 1]$, on en déduit que l'intégrale de cette fonction positive entre des bornes (0 et 1) bien rangées est positive, donc cela signifie que pour tout n naturel non nul, I_n est positif. On a donc prouvé que la suite est minorée par 0.

(I_n) étant une suite minorée et décroissante, on peut en conclure qu'elle est convergente vers une limite $\ell \geqslant 0$, car la suite est minorée par 0.

3. Détermination de la limite ℓ.

f_n est sous la forme d'une somme de deux fonctions.

Une primitive de $x \longmapsto x$ est $x \longmapsto \dfrac{1}{2}x^2$.

Une primitive de $x \longmapsto \mathrm{e}^{-nx}$ est $x \longmapsto \dfrac{-1}{n}\mathrm{e}^{-nx}$.

Primitive

Pour trouver une primitive de $x \longmapsto \mathrm{e}^{-nx}$ on peut transformer l'écriture en $x \longmapsto \dfrac{-1}{n} \times \underbrace{(-n)}_{u'(x)} \mathrm{e}^{\overbrace{-nx}^{u(x)}}$.

une primitive de $u'\mathrm{e}^u$ est e^u, donc une primitive de $\dfrac{-1}{n}u'\mathrm{e}^u$ est $\dfrac{-1}{n}\mathrm{e}^u$.

Pour tout entier n naturel non nul, une primitive de f_n sur l'intervalle $[0 ~;~ 1]$ est donc définie par :
$F_n(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{-1}{n}\mathrm{e}^{-nx} = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}$. On a donc :
$I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \left[\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^1 = F_n(1) - F_n(0)$.
$I_n = \dfrac{1}{2} \times 1^2 - \dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-n} - \left(\dfrac{1}{2} \times 0^2 - \dfrac{1}{n}\mathrm{e}^0\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} \times \left(1 - \mathrm{e}^{-n}\right)$.

On a donc :

$$I_n = \frac{1}{n} \times \left(1 - \mathrm{e}^{-n}\right)$$

Comme on a : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 1 - \mathrm{e}^{-n} = 1$ et comme $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, par produit, puis par somme de limites, on en déduit : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n = \frac{1}{2}$.

Finalement, nos deux conjectures sont bien vérifiées : la suite est bien décroissante, et converge vers une limite qui est bien $\dfrac{1}{2}$, l'aire sous la droite d'équation $y = x$ entre les abscisses 0 et 1.

Exercice 3

Partie A :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} -1 \leqslant -\cos x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \end{cases}$ donc par somme : $-2 \leqslant -\cos x + \sin x \leqslant 2$.

En ajoutant 1, on obtient : $-1 \leqslant -\cos x + \sin x + 1 \leqslant 3$.

En multipliant par $\mathrm{e}^{-x} > 0$, on obtient : $-\mathrm{e}^{-x} \leqslant (-\cos x + \sin x + 1)\mathrm{e}^{-x} \leqslant 3\mathrm{e}^{-x}$.

Ainsi, pour tout réel x, $-\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 3\mathrm{e}^{-x}$.

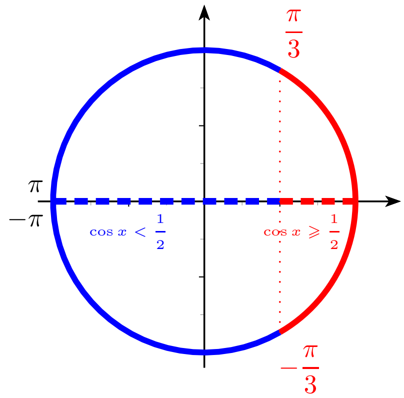
2. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

3. f est le produit de deux fonctions :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \underbrace{\mathrm{e}^{-x}}_{u(x)} \underbrace{(-(\overbrace{-\sin x}^{\cos'(x)}) + \overbrace{\cos x}^{\sin'(x)})}_{v'(x)} + \underbrace{(-\mathrm{e}^{-x})}_{u'(x)} \underbrace{(-\cos x + \sin x + 1)}_{v(x)} \\ &= \mathrm{e}^{-x}(\sin x + \cos x) + \mathrm{e}^{-x}(\cos x - \sin x - 1) \\ &= \mathrm{e}^{-x}(\sin x + \cos x + \cos x - \sin x - 1) \\ &= \mathrm{e}^{-x}(2\cos x - 1). \end{aligned}$$

4. a. Etude du signe de $f'(x)$.



Sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$, et en s'aidant d'un cercle trigonométrique :

$$\begin{aligned} 2\cos x - 1 \geqslant 0 &\iff \cos x \geqslant \frac{1}{2} \\ &\iff -\frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		π
Signe de e^{-x}		$+$		$+$		$+$	
Signe de $2\cos x - 1$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b. On en déduit les variations de f sur $[-\pi\ ;\ \pi]$:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$2e^{\pi}$	$\searrow$	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}e^{\frac{\pi}{3}}$	$\nearrow$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}e^{\frac{-\pi}{3}}$	$\searrow$	$2e^{-\pi}$

Partie B :

1. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) - \left(-e^{-x}\right)\cos x \\ &= e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1 + \cos x) \\ &= e^{-x}(\sin x + 1). \end{aligned}$$

Méthode

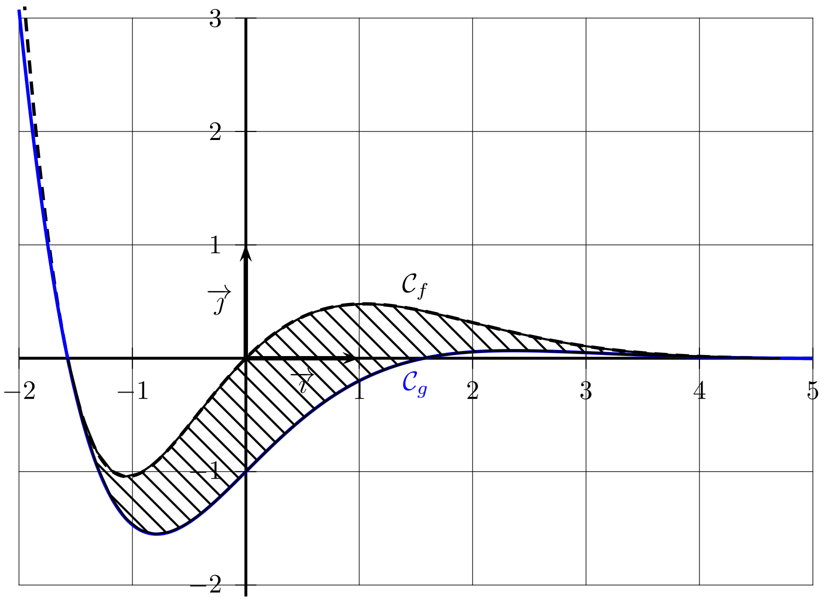
Pour étudier la position relative de deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, on étudie le signe de la différence $f(x) - g(x)$.

Or, pour tout réel x :

- $e^{-x} > 0$,
- $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ donc $\sin x + 1 \geqslant 0$.

On a donc, pour tout réel x, $f(x) - g(x) \geqslant 0$, ce qui signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$.

2. a. Domaine $\mathcal{D}$.



b. Sur $\mathbb{R}$, a fortiori sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$ est donc donnée, en unités d'aire, par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \underbrace{\mathrm{e}^{-x}(\sin x + 1)}_{H(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[H(x)\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \\
&= H\left(\frac{3\pi}{2}\right) - H\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \left(-\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{2} - \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{2} - 1\right)\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{2}} - \left(-\frac{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2} - \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2} - 1\right)\mathrm{e}^{-\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{2}} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

Aire

L'aire est donnée par l'intégrale de la différence "fonction de dessus − fonction de dessous ". Donc il est important d'avoir la comparaison entre f et g sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right]$.

L'unité graphique est de 2 cm, l'unité d'aire est donc de 4 cm². Par conséquent, une valeur approchée de l'aire du logo est, à 10^{-2} près :

$$4 \times \left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{2}} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\right) \approx 9{,}6 \text{ cm}^2.$$