Terminale

MATHEMATIQUES
Probabilités - Loi binomiale : sujet d'entraînement (corrigé)

Exercice 1

1. Les deux événements F et R sont indépendants si et seulement si $p(F \cap R) = p(F) \times p(R)$.

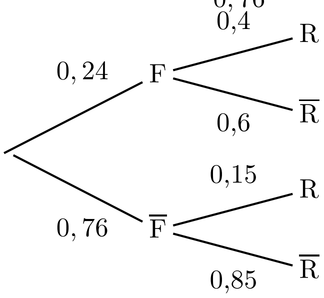
$p(F \cap R) = 0,24 \times 0,4 = 0,096$ et $p(F) \times p(R) = 0,24 \times 0,21 = 0,0504$.
Les événements F et R ne sont pas indépendants.

2. D'après la formule des probabilités totales, on :
$p(R) = p(F \cap R) + p(\overline{F} \cap R) = p(F) \times p_F(R) + p(\overline{F}) \times p_{\overline{F}}(R)$.

On a $p(R) = 0,21$, $p(F) = 0,24$ et $p_F(R) = 0,4$.

Ainsi, $0,21 = 0,24 \times 0,4 + 0,76 \times p_{\overline{F}}(R)$, d'où $p_{\overline{F}}(R) = \dfrac{0,21 - 0,096}{0,76} = 0,15$.

3.



4. a. Le choix des 10 personnes peut être assimilé à une répétition de 10 épreuves identiques et indépendantes de Bernoulli. Le succès est « la personne fume. X est la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes qui fument parmi les 10 personnes.
X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,24$.
Pour tout entier $k \in [0\ ;\ 10]$, $P(X = k) = \dbinom{10}{k} \times 0,24^k \times 0,76^{10-k}$.

b. L'événement $(X \geqslant 1)$ a pour événement contraire $(X = 0)$.
Ainsi, $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \dbinom{10}{0} \times 0,24^0 \times 0,76^{10} = 1 - 0,76^{10} \simeq 0,936$

Exercice 2

1. La probabilité qu'un élève interrogé au hasard pratique le tri sélectif est 0,59. La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,59$.
Pour une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, la probabilité d'obtenir k succès est donnée par :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

2. La probabilité qu'aucun des quatre élèves ne pratique le tri sélectif est :
$P(X = 0) = \dbinom{4}{0} \times 0,59^0 \times (1 - 0,59)^4 = 0,41^4 \approx 0,03$

3. La probabilité qu'au moins deux des quatre élèves pratiquent le tri sélectif est $P(X \geqslant 2)$.

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 2) &= P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) \\ &= \binom{4}{2} \times 0,59^2 \times (1 - 0,59)^{4-2} + \binom{4}{3} \times 0,59^3 \times (1 - 0,59)^{4-3} + \binom{4}{4} \times 0,59^4 \times (1 - 0,59)^{4-4} \\ &\approx 0{,}351\,1 + 0{,}336\,8 + 0{,}121\,2 \approx 0,81 \end{aligned}$$

On peut aussi utiliser l'évènement contraire :

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 2) &= 1 - P(X < 2) \\ &= 1 - (P(X=0) + P(X=1)) \\ &\approx 1 - (0{,}0283 + 0{,}1627) \\ &\approx 0,81 \end{aligned}$$

Rappel

• Le contraire de "au moins 2" est "au plus 1" soit "0 ou 1".
• $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

Exercice 3

1. Le choix d'une réponse est une épreuve de Bernoulli (deux issues possibles : soit c'est la bonne réponse, soit ce n'est pas la bonne réponse). On répète cette épreuve 8 fois de manière identique et indépendante. X compte le nombre de bonnes réponses. Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = \dfrac{1}{4} = 0,25$.

2. $p(X=2) = \dbinom{8}{2} \times 0,25^2 \times (1-0,25)^6 = 0,41^4 \approx 0,311$.

Exercice 4

1. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,03$.

2. a. $p(X=0) = \dbinom{100}{0} \times 0,03^0 \times (1-0,03)^{100} = 0,97^{100} \simeq 0,048$.
La probabilité qu'il n'y ait aucun rouleau de défectueux est d'environ 0,048.

b. $p(X=1) = \dbinom{100}{1} \times 0,03^1 \times (1-0,03)^{99} = 100 \times 0,03 \times 0,97^{100} \simeq 0,147$.
La probabilité qu'il y ait un unique rouleau défectueux est d'environ 0,147.

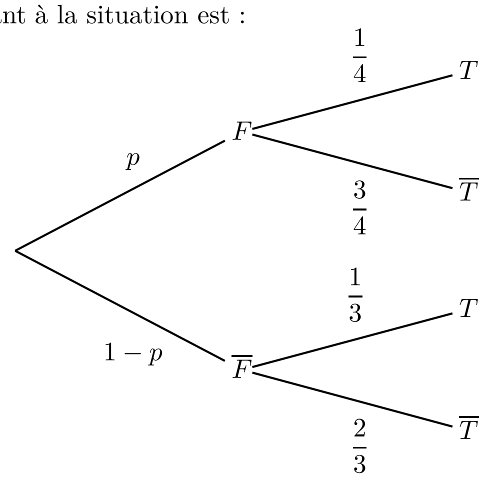
c. Au plus deux rouleaux défectueux est l'événement $(X \leqslant 2)$.
Avec la calculatrice, on obtient $p(X \leqslant 2) \simeq 0,420$.
La probabilité qu'il y ait au plus deux rouleaux défectueux est d'environ 0,420.

d. Au moins 7 rouleaux défectueux est l'événement $(X \geqslant 7)$. L'événement contraire est $(X \leqslant 6)$.
Ainsi, $p(X \geqslant 7) = 1 - p(X \leqslant 6) \simeq 1 - 0,969$ soit 0,031.
La probabilité qu'il y ait au moins 7 rouleaux défectueux est d'environ 0,031.

Exercice 5

Partie A

1. L'arbre de probabilités correspondant à la situation est :



Partition

Les événements F et $\overline{F}$ forment une partition de l'univers.

2. $T = (T \cap F) \cup (T \cap \overline{F})$. C'est une réunion d'évènements incompatibles, donc :

En utilisant la formule des probabilités totales, on obtient :
$p(F) = p(T \cap F)) + p(T \cap \overline{F}) = p_F(T) \times p(F) + p_{\overline{F}}(T) \times p(T)$.

Par conséquent : $p(T) = p \times \dfrac{1}{4} + (1-p) \times \dfrac{1}{3} = \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3}\right)p + \dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{12}p + \dfrac{1}{3}$

On sait que $p(T) = 0,3 = \dfrac{3}{10}$.

On en déduit : $-\dfrac{1}{12}p + \dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{10} \iff \dfrac{p}{12} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{10} = \dfrac{1}{30}$ d'où $p = \dfrac{12}{30} = \dfrac{2}{5}$.

La probabilité de l'évènement F est : $p(F) = \dfrac{2}{5}$

3. $p_T(F) = \dfrac{p(F \cap T)}{p(T)} = \dfrac{\frac{p}{4}}{\frac{3}{10}} = \dfrac{10p}{3 \times 4} = \dfrac{5p}{6} = \dfrac{5}{6} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$; $p_T(F) = \dfrac{1}{3}$

Partie B

1. a. Soit N la variable aléatoire donnant le nombre de membres adhérant à la section tennis parmi les membres choisis.
Nous avons donc une répétition d'une expérience aléatoire à deux issues, identique et indépendante. N suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 4$ (nombre d'épreuves) et $p = \dfrac{3}{10}$: $N \hookrightarrow \mathscr{B}\left(4\ ;\ \dfrac{3}{10}\right)$.

On sait alors que $p(N = k) = \dbinom{4}{k} \times \dfrac{3}{10}^k \times \left(1 - \dfrac{3}{10}\right)^{4-k} = \dbinom{4}{k} \times \dfrac{3}{10}^k \times 0,7^{4-k}$.

D'où : $p(N = 2) = \dbinom{4}{2} \times \dfrac{3}{10}^2 \times 0,7^2 = \dfrac{1\,323}{5\,000} \approx 0{,}264\,6$.

b. Cette fois, N suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n\ ;\ \dfrac{3}{10}\right)$.

$p_n = p(N \geqslant 1) = 1 - p(N = 0) = 1 - \dbinom{n}{0} \times \left(\dfrac{3}{10}\right)^0 \times \left(\dfrac{7}{10}\right)^n = 1 - \left(\dfrac{7}{10}\right)^n$.

Ainsi, $p_n = 1 - \left(\dfrac{7}{10}\right)^n$.

c. Résolution de l'inéquation $p_n \geqslant 0,99$.

$$\begin{array}{rcll}
p_n & \geqslant & 0,99 & \\
1 - \left(\dfrac{7}{10}\right)^n & \geqslant & 0,99 & \\
\left(\dfrac{7}{10}\right)^n & \leqslant & 0,01 & \\
\ln\left(\left(\dfrac{7}{10}\right)^n\right) & \leqslant & \ln(0,01) & \text{car la fonction } \ln \text{ est croissante.} \\
n\ln\left(\dfrac{7}{10}\right) & \leqslant & \ln(0,01) & \\
n & \geqslant & \dfrac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{7}{10}\right)} & \text{car } \ln\left(\dfrac{7}{10}\right) < 0. \\
n & \geqslant & 12,9 &
\end{array}$$

Il faut que n soit supérieur ou égal à 13 pour que p_n soit supérieur à 0,99.

2. a. X peut prendre les valeurs 35 (deux jetons gagnants), 15 (un seul jeton gagnant) et -5 (deux jetons perdants).

La probabilité de l'événement $(X = -5)$ est donné par la probabilité d'obtenir 2 jetons perdants.

Ainsi, $p(X = -5) = \dfrac{90}{100} \times \dfrac{89}{99} = \dfrac{89}{110}$.

Explications

Le tirage des deux jetons se fait de manière successive et sans remise. Il y a au départ 100 jetons et 90 perdants, d'où la probabilité de tirer un jeton perdant de $\dfrac{90}{100}$ au premier tirage, puis il reste 89 jetons perdants sur 99 restants au total, d'où la probabilité de tirer un jeton perdant au deuxième tirage de $\dfrac{89}{99}$.
Vous pouvez aussi faire un arbre pour avoir plus visuellement ces résultats.

De la même façon,

La probabilité de l'événement $(X = 35)$ est donné par la probabilité d'obtenir 2 jetons gagnants.

$p(X = 35) = \dfrac{10}{100} \times \dfrac{9}{99} = \dfrac{1}{110}$.

La loi de probabilité de X est donc :

x_i	-5	15	35
$P(X = x_i)$	$\dfrac{89}{110}$	$\dfrac{2}{11}$	$\dfrac{1}{110}$

b. L'espérance est $E(X) = \displaystyle\sum_i x_i p\left(X = x_i\right) = -5 \times \dfrac{89}{110} + 15 \times \dfrac{2}{11} + 35 \times \dfrac{1}{110} = -\dfrac{110}{110} = -1$.

$E(X) = -1$. Cela signifie qu'en moyenne, sur un grand nombre de partie, le joueur perd 1 euro par partie.