MATHEMATIQUES
Suites. Limites de suites : QCM CORRIGE

Exercice 1

Conjecture

Avec les premiers termes (obtenus avec la calculatrice) on peut conjecturer que cette suite est croissante. On peut le montrer par récurrence.

- On a $v_1 = 3 \times 5 + 1 = 16$.

Par conséquent $v_0 < v_1$, donc v n'est pas décroissante.

- On montre que v est croissante.

Initialisation :
$v_0 = 3$ et $v_1 = 16$.
On a $v_0 \leqslant v_1$, la propriété est donc vraie au rang 0.

- Hérédité :

Supposons que pour **un** entier naturel n, on ait :

$$v_n \leqslant v_{n+1} \qquad \text{Hypothèse de récurrence.}$$

Montrons qu'alors on a : $v_{n+1} \leqslant v_{n+2}$.
On a :

$$\begin{aligned} v_n &\leqslant v_{n+1} && \text{Par hypothèse de récurrence.} \\ f(v_n) &\leqslant f(v_{n+1}) && f \text{ est croissante sur } \mathbb{R} \\ v_{n+1} &\leqslant v_{n+2} && \text{Propriété au rang } n+1. \end{aligned}$$

Justification

La fonction f associée à la suite est définie par $f(x) = 3x + 1$ qui est croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc si la propriété est vraie d'un rang n alors elle est vraie du rang $n + 1$ (la propriété est donc héréditaire).

- Conclusion : Pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, la propriété est vraie, ce qui équivaut à dire que :

$$(v_n) \text{ est une suite croissante.}$$

Une suite croissante est minorée par son premier terme. Donc v est minorée.

- Le calcul des premiers termes montrent que v n'est pas géométrique.

Réponse : b. et c.

Exercice 2

- On a pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$, donc 0 est un minorant de la suite.

- Pour tout entier naturel n,

$u_n - 2,5 = \dfrac{8n+5}{2n+2} - \dfrac{2,5(2n+2)}{2n+2} = \dfrac{8n+5-5n-5}{2n+2} = \dfrac{3n}{2n+2} \geqslant 0$.

Donc, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 2,5$. Par conséquent, u est minorée par 2,5.

- $u_n - 4 = \dfrac{8n+5}{2n+2} - \dfrac{4(2n+2)}{2n+2} = \dfrac{8n+5-8n-8}{2n+2} = \dfrac{-3}{2n+2} \leqslant 0$.

Donc, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 4$. Par conséquent, u est majorée par 4.

Pensez-y !

La calculatrice permet d'émettre des conjectures. Bien pratique ....

- u est minorée et majorée. Elle est donc bornée.

Réponse : a. b. c. et d.

Exercice 3

- La suite est décroissante, elle est majorée par son premier terme.
- La suite est minorée par 4, donc $u_n \geqslant 4$ et comme $4 > 3$, la suite est aussi minorée par 3.

Réponse : a. et c.

Exercice 4

Il faut un intervalle ouvert qui contient 2 : $]0\ ;\ +\infty[$ et $]1,99999\ ;\ 2,00001[$ conviennent.

C'est du cours

On dit que la suite (u_n) tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$ (ou converge vers ℓ) , si tout intervalle ouvert I contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Réponse : a. et d.

Exercice 5

Il faut un intervalle ouvert de la forme $]-\infty\ ;\ \mathrm{A}[$: $]-\infty\ ;\ 2[$ convient.

C'est du cours

Une suite (u_n) tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$, si tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty\ ;\ \mathrm{A}[$ avec $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Réponse : a. et d.

Exercice 6

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7}{n^2} = 0 \end{array}\right\} \text{ Par somme, } \lim_{n\to+\infty} 3 + \frac{5}{n} - \frac{7}{n^2} = 3.$$

Réponse : b.

Exercice 7

$\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$, car $3 > 1$.
Par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} -2 \times 3^n = -\infty$.

Réponse : b.

Exercice 8

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 0,2^n = 0^+ \text{ car } -1 < 0,2 < 1 \end{array}\right\} \text{ Par quotient, } \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{0,2^n} = +\infty.$$

Réponse : b.

LA factorisation

Par somme on ne peut pas conclure (FI). Pensez à factoriser par "le terme" de plus haut degré.

Exercice 9

$$-4n^3+3n^2-6n+\pi = n^3\left(-4+\frac{3n^2}{n^3}-\frac{6n}{n^3}+\frac{\pi}{n^3}\right) = n^3\left(-4+\frac{3}{n}-\frac{6}{n^2}+\frac{\pi}{n^3}\right).$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3}{n}=0\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{6}{n^2}=0\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\pi}{n^3}=0\end{array}\right\}\text{ Par somme, }\lim_{n\to+\infty}\left(-4+\frac{3}{n}-\frac{6}{n^2}+\frac{\pi}{n^3}\right)=-4.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-4+\dfrac{3}{n}-\dfrac{6}{n^2}+\dfrac{\pi}{n^3}\right)=-4\\ \lim\limits_{n\to+\infty}n^3=+\infty\end{array}\right\}\text{ Par produit, }\lim_{n\to+\infty}\left(-4+\frac{3}{n}-\frac{6}{n^2}+\frac{\pi}{n^3}\right)=-\infty.$$

Exercice 10

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1-n}{5+n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\left(\frac{1}{n}-1\right)}{n^2\left(\frac{5}{n^2}+1\right)}\underbrace{=}_{\text{On simplifie}}\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}-1}{n\left(\frac{5}{n^2}+1\right)}$$

Encore LA factorisation

Par quotient on ne peut pas conclure (FI). Pensez à factoriser par "les termes" dominants au numérateur et au dénominateur.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}-1=-1\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5}{n^2}+1=1\text{ donc, par produit }\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(\dfrac{5}{n^2}+1\right)=+\infty\end{array}\right\}\text{ Par quotient, }\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}-1}{n\left(\frac{5}{n^2}+1\right)}=0$$

Réponse : a.

Exercice 11

Pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{array}{rcll}-1\leqslant & \cos(n^3) & \leqslant 1 & \\ 2\geqslant & -2\cos(n^3) & \geqslant -2 & \text{On multiplie par } -2<0.\\ 8\geqslant & 6-2\cos(n^3) & \geqslant 4 & \text{On ajoute 6 .}\\ \dfrac{8}{n^3}\geqslant & \dfrac{6-2\cos(n^3)}{n^3} & \geqslant \dfrac{4}{n^3} & \text{On divise par } n^3.\\ \dfrac{4}{n^3}\leqslant & \dfrac{6-2\cos(n^3)}{n^3} & \leqslant \dfrac{8}{n^3} & \text{On remet dans l'ordre qui va bien.}\end{array}$$

Réponse : a.

Exercice 12

Le théorème de comparaison of course !
La preuve :

$$\begin{aligned} -1 \leqslant &\quad (-1)^n &\leqslant 1 \\ 3n^4 - 1 \leqslant &\quad 3n^4 + (-1)^n &\leqslant 3n^4 + 1 \end{aligned}$$

Et c'est $\lim\limits_{n \to +\infty} 3n^4 - 1 = +\infty$ qui permet de justifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} 3n^4 + (-1)^n = +\infty$.

Réponse : a.

Exercice 13

Croissante et majorée. Décroissante minorée. Je pense que votre prof vous l'a dit et redit !.

Réponse : b. et f.