MATHEMATIQUES
Suites. Limites de suites : entraînement 1

Exercice 1

- PARTIE A -

1. $u_0 = 2$.
$u_1 = \underbrace{u_0 - 0,25\ u_0}_{\text{Baisse de 25 \%}} + \underbrace{2}_{\substack{2000\\ \text{nouvelles}\\ \text{personnes}}} = 0,75u_0 + 2 = 0,75 \times 2 + 2 = 3,5.$

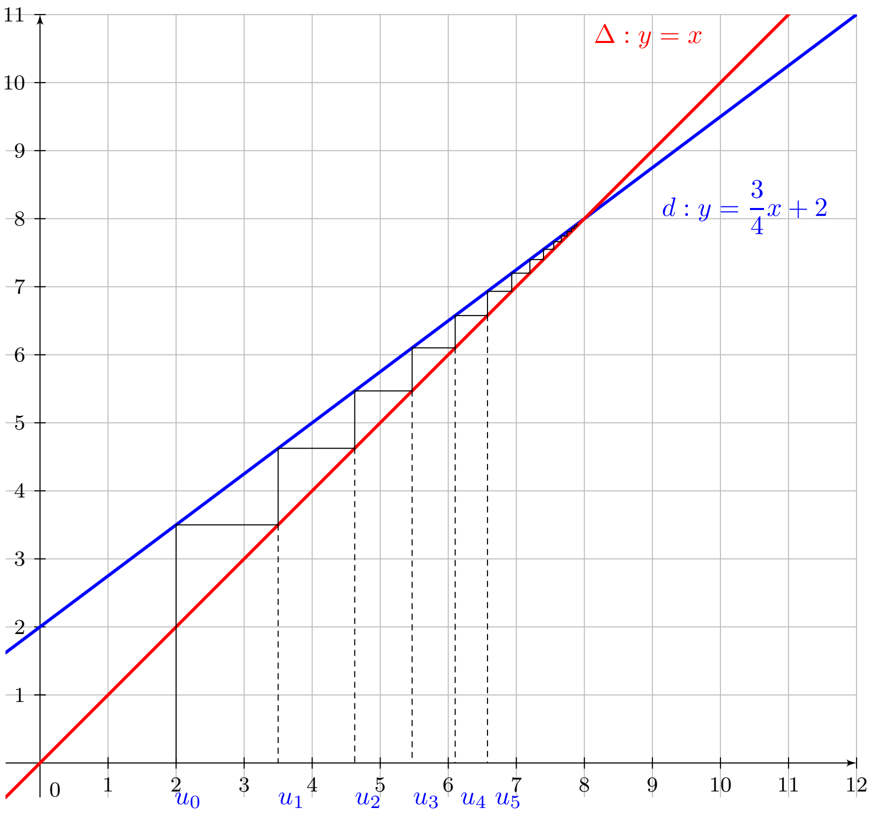
En 2019, le nombre d'habitants sera de 3 500.

Deux choses
- Faites attention, u_n est le nombre d'habitants en milliers.
- Diminuer une quantité de 25 % revient à la multiplier par $1 - 0,25 = 0,75$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 0,25u_n + 2 = (1 - 0,25)u_n + 2$.

La fonction f associée vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$. Ainsi, $f(x) = 0,75x + 2 = \dfrac{3}{4}x + 2$.

3. Représentation graphique :



4. Le nombre d'habitants en 2022 est donné par $_4$. Graphiquement, $u_4 \simeq 6$.
En 2022, l'estimation du nombre d'habitants est d'environ 6 000.

- PARTIE B -

1. Tableau complété :

N	0	1	2	3	4	5	6	7		
U	2	$3,5$	$4,63$	$5,47$	$6,10$	$6,58$	$6,93$	$7,20$		
$U \leqslant 7$	$Vrai$	$Vrai$	$Vrai$	$Vrai$	$Vrai$	$Vrai$	$Vrai$	$Faux$		

2. La dernière valeur de N est $2018 + 7$ soit 2025.
Cela signifie que la population de la ville atteindra les 7 000 habitants pour la première fois en 2025.

- PARTIE C -

1. Montrons (par récurrence) que la suite (u_n) est majorée par le réel 8.

- **Initialisation :** $u_0 = 2 < 8$. La propriété est donc vraie au rang 0 ;

- **Hérédité :** Soit n un entier naturel fixé quelconque.
  On suppose vraie la propriété au rang n, c'est à dire $u_n < 8$.

Conseil

Soignez votre rédaction pour un raisonnement par récurrence. Ell est prise en compte dans l'éventuelle notation....

$$\begin{array}{rcll} u_n & < & 8 & \text{On part de l'hypothèse de récurrence.} \\ 0,75u_n & < & 0,75 \times 8 & \text{On multiplie par 0,75.} \\ 0,75u_n + 2 & < & 6 + 2 & \text{On ajoute 2.} \\ u_{n+1} & < & 8 & \text{C'est la propriété au rang } n+1. \end{array}$$

On conclut que la propriété est héréditaire et donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 8$. La suite (u_n) est donc majorée par le réel 8.

2. Montrons (par récurrence) que la suite (u_n) est strictement croissante.

Rappel

Ici, la propriété à démontrer n'est pas explicitement écrite. Il s'agit donc d'utiliser la définition de "la suite u est croissante" : une suite u est croissante si et seulement si pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.

- **Initialisation :** $u_0 = 2$ et $u_1 = 3,5 > u_0$. La propriété est donc vraie au rang 0 ;

- **Hérédité :** Soit n un entier naturel fixé quelconque.
  On suppose vraie la propriété au rang n, c'est à dire $u_n < u_{n+1}$.

$$\begin{array}{rcll} u_n & < & u_{n+1} & \text{On part de l'hypothèse de récurrence.} \\ 0,75u_n & < & 0,75 \times u_{n+1} & \text{On multiplie par 0,75.} \\ 0,75u_n + 2 & < & 0,75 \times u_{n+1} + 2 & \text{On ajoute 2.} \\ u_{n+1} & < & u_{n+2} & \text{C'est la propriété au rang } n+1. \end{array}$$

- **Conclusion :** On conclut que la propriété est héréditaire et donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc strictement croissante.

3. La suite (u_n) est majorée et strictement croissante donc convergente.

On conjecture qu'elle converge vers 8.

Ne pas dire n'importe quoi !

Le théorème de convergence monotone utilisé ici permet simplement de prouver que la suite converge.... c'est tout ! On peut émettre la conjecture que sa limite est 8 mais cela reste une conjecture.
En fait, si on pose $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$.
Puisque $u_{n+1} = 0,75u_n + 2$ on obtient $\ell = 0,75\ell + 2$ et on trouve $\ell = 8$ en résolvant cette équation. Et là on prouve bien que cette limite est 8.

- PARTIE D -

1. Montrons que (v_n) est une suite géométrique.
Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - 8 \\
&= (0,75u_n + 2) - 8 \quad \text{On remplace } u_{n+1} \text{ par } 0,75u_n + 2 \\
&= 0,75u_n - 6 \quad \text{On réduit} \\
&= 0,75(\underbrace{v_n + 8}_{u_n}) - 6 \quad \text{On remplace } u_n \text{ par } v_n + 8. \\
&= 0,75v_n + \cancel{6} - \cancel{6} \quad \text{On développe et réduit.} \\
&= 0,75v_n \quad \text{On obtient la forme souhaitée : } q \times v_n
\end{aligned}$$

Explications

On exprime u_n en fonction de v_n en utilisant l'égalité : $v_n = u_n - 8$.
On obtient : $u_n = v_n + 8$.

On vient de montrer que (v_n) est une suite géométrique (car cette égalité est vraie pour tous les entiers naturels n) de raison $0,75$ et de premier terme $v_0 =_0 -8 = 2 - 8 = -6$.

2. La suite (v_n) étant géométrique de raison $q = 0,75$ et de terme initial $v_0 = -6$, on en déduit que :
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = -6 \times 0,75^n$.
Par conséquent, $u_n = v_n + 8 = 8 - 6 \times 0,75^n$.

3. $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,75^n = 0$ car $0 < 0,75 < 1$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 8 - 6 \times 0 = 8$.

On en déduit qu'à long terme, la population de la ville se stabilisera autour des 8 000 habitants sans jamais les dépasser.

Exercice 2

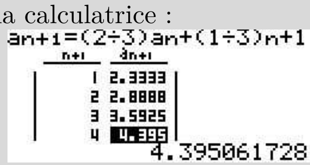
1. **a.** On calcule les premiers termes, par exemple en utilisant le mode récurrence de la calculatrice, et on obtient :

$$u_1 = 2 + \frac{1}{3} \approx 2,33 \qquad u_2 = 2 + \frac{8}{9} \approx 2,89$$

$$u_3 = 3 + \frac{16}{27} \approx 3,59 \qquad u_4 = 4 + \frac{32}{81} \approx 4,40$$

Calculatrice

Avec la calculatrice :



b. On peut donc émettre la conjecture que la suite est croissante. On pourra en tout cas affirmer qu'elle n'est pas décroissante.

2. **a.** La propriété à démontrer est : Pour tout entier naturel n : $u_n \leqslant n + 3$.

- **Initialisation :** Puisque l'on a $u_0 = 2$ et $0 + 3 = 3$, on vérifie bien :
$u_0 \leqslant 0 + 3$: La propriété est vraie au rang 0.

- **Hérédité :** Soit n un entier naturel fixé quelconque.
On suppose vraie la propriété au rang n c'est-à-dire $u_n \leqslant n + 3$.

$$\begin{aligned}
u_n &\leqslant n + 3 \quad \text{On part de l'hypothèse de récurrence.} \\
\frac{2}{3}u_n &\leqslant \frac{2}{3} \times (n + 3) \quad \text{On multiplie par } \frac{2}{3} \\
\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 &\leqslant \frac{2}{3} \times (n + 3) + \frac{1}{3}n + 1 \quad \text{On ajoute } \frac{1}{3}n + 1. \\
u_{n+1} &\leqslant \frac{2}{3}n + 2 + \frac{1}{3}n + 1 \quad \text{On réduit.} \\
u_{n+1} &\leqslant n + 3 \leqslant n + 4 \quad \text{C'est la propriété au rang } n + 1.
\end{aligned}$$

On a donc $u_{n+1} \leqslant (n + 1) + 3$, c'est à dire que la propriété au rang $n + 1$ est vraie.

- **Conclusion :** Par le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant n + 3$.

b. Démonstration de l'égalité :

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-u_n \\ &= -\frac{1}{3}u_n+\frac{1}{3}n+\frac{3}{3} \\ &= \frac{1}{3}(-u_n+n+3) \\ &= \frac{1}{3}(n+3-u_n) \end{aligned}$$

c. Comme on l'a montré à la question précédente, pour tout n naturel, on a $u_n \leqslant n+3$. Ainsi, $n+3-u_n \geqslant 0$ et par suite $\frac{1}{3}(-u_n+n+3) \geqslant 0$.

On vient de démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-u_n \geqslant 0$, ce quyi prouve que la suite (u_n) est croissante.

3. a. Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1}-(n+1) \\ &= \frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-n-1 \\ &= \frac{2}{3}u_n-\frac{2}{3}n \\ &= \frac{2}{3}(u_n-n) \end{aligned}$$

Donc $v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n$.

On en déduit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien géométrique de raison $q=\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0=u_0-0=2$.

b. On peut donc en déduire une expression explicite du terme général de la suite v : $v_n=v_0\times q^n=2\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Enfin, puisque l'on a, pour tout n, $v_n=u_n-n$, on en déduit :

$u_n=v_n+n$, et donc on aboutit bien à l'expression demandée : $u_n=2\left(\frac{2}{3}\right)^n+n$.

c. Calcul de la limite de la suite (u_n) :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0 \text{ Car } -1<\frac{2}{3}<1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n=0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty \end{array}\right\} \text{Par somme, } \lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{2}{3}\right)^n+n=+\infty.$$

4. a. Expression de S_n en fonction de n :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= u_0+u_1+\ldots+u_n \\ &= \underbrace{2\left(\frac{2}{3}\right)^0+0}_{u_0}+\underbrace{2\left(\frac{2}{3}\right)^1+1}_{u_1}+\ldots\ldots+\underbrace{2\left(\frac{2}{3}\right)^n+n}_{u_n} \\ &= 2\left(\frac{2}{3}\right)^0+2\left(\frac{2}{3}\right)^1+\ldots\ldots+2\left(\frac{2}{3}\right)^n+(0+1+\ldots\ldots+n) \end{aligned}$$

Explications

S_n est la somme de $n+1$ termes de la suite u_n. Mais, comme par ailleurs, on peut considérer que chaque terme u_n est la somme de v_n et de n, donc en ré-ordonnant les termes, S_n est la somme de deux « sous-sommes » : celle des $n+1$ premiers termes de la suite v et celle des $n+1$ premier entiers naturels.

La première sous-somme est une somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique, et vaut donc :

$$2\left(\frac{2}{3}\right)^0 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^1 + ... + 2\left(\frac{2}{3}\right)^n = \underbrace{v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}_{\text{Formule}} = 2\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)} = 6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$$

La seconde sous-somme est la somme des $n+1$ premiers entiers naturels, c'est à dire la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 1, donc elle vaut :

$$0+1+2+....+n = \underbrace{(n+1)\times\frac{0+n}{2}}_{\text{Formule}} = \underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{\text{A connaître}}.$$

Finalement, on a $S_n = 6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n+1)}{2}$.

b. On en déduit : $T_n = \dfrac{6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n+1)}{2}}{n^2}$

$$T_n = \frac{6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}$$

$$T_n = \frac{6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Puisque, une fois encore, q est entre -1 et 1, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$.

Donc par limite d'une somme de suites, puis d'un produit de suites :

$$\lim_{n\to+\infty} 6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 6.$$

Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, donc par limite d'un quotient de suites,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} = 0.$$

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$, et donc finalement, par limite d'une somme de suites, on arrive à conclure que la suite T converge vers $\frac{1}{2}$.