MATHEMATIQUES
Suites. Limites de suites : entraînement 2

Exercice 1

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout nombre entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4.$$

On pose, pour tout nombre entier naturel n, $v_n = u_n - 6$.

a. Pour tout nombre entier naturel n, calculer v_{n+1} en fonction de v_n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

b. Démontrer que pour tout nombre entier naturel $n, u_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$.

c. Étudier la convergence de la suite (u_n).

2. On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$:

$$nw_n = (n+1)w_{n-1} + 1 \quad \text{et} \quad w_0 = 1.$$

Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite.

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

a. Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10}.

b. Conjecturer w_n en fonction de n.

c. Démontrer cette conjecture.

d. Donner la nature de la suite (w_n) puis calculer $w_{2\,019}$.

Exercice 2

- Partie A -

1. Soit (x_n) la suite définie par $x_n = \dfrac{1}{n+1}$.

a. La suite (x_n) est-elle bornée ? Justifier.

b. Déterminer en justifiant le sens de variation de (x_n).

c. Que peut-on dire de la convergence de la suite (x_n) ?

2. Soit (y_n) la suite définie par $y_n = -2 \times (-1)^n$.

a. La suite (y_n) est-elle bornée ? Justifier.

b. Que peut-on dire de la convergence de la suite (y_n) ? Aucune justification n'est attendue.

- Partie B -

On considère une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = \frac{-2}{u_n}$$

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple en utilisant par exemple les suites étudiées dans la partie **A.**

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.

2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.

3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.

4. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers zéro.

Exercice 3

L'objet de cet exercice est l'étude de flux de populations entre deux zones géographiques : une ville notée A, une zone périphérique notée B.

Pour modéliser les flux de population, on fait les hypothèses suivantes :

— La population totale des deux zones ***reste constante.***

— Chaque année, 10% de la population de la zone A passe dans la zone B, et 10% de la population de la zone B passent dans la zone A.

Au premier janvier 2018, la zone A comptait 5 000 habitants et la zone B en comptait 2 000.

On désigne par a_n et b_n les nombres d'habitants respectifs des zones A et B au premier janvier de l'année $2018 + n$. On admettra, pour l'étude mathématique, que les nombres réels a_n et b_n peuvent ne pas être entiers.

On a ainsi : $\begin{cases} a_{n+1} = 0,9a_n + 0,1b_n \\ b_{n+1} = 0,9b_n + 0,1a_n \end{cases}$

1. a. Justifier l'égalité $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,1b_n$.

b. A l'aide de la calculatrice, déterminer a_{20} et b_{20} . Interpréter ces résultats.

c. Conjecturer les limites des suites (a_n) et (b_n) .

2. Démontrer que la suite (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = a_n - b_n$ est géométrique.

3. a. Par quelle relation entre a_n et b_n traduit-on la conservation de la population totale des deux zones réunies ?

b. Montrer que $a_n = \dfrac{1}{2}w_n + 3500$ et en déduire l'expression de a_n en fonction de n.

4. Quelle est la limite de la suite (a_n) ? de la suite (b_n) ? Interpréter ces résultats.