



MATHEMATIQUES

Suites. Limites de suites : entraînement 3

Exercice 1

Un apiculteur étudie l'évolution de sa population d'abeilles. Au début de son étude, il évalue à 10 000 le nombre de ses abeilles.

Chaque année, l'apiculteur observe qu'il perd 20 % des abeilles de l'année précédente.

Il achète un nombre identique de nouvelles abeilles chaque année. On notera c ce nombre exprimé en dizaines de milliers.

On note u_0 le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, de cet apiculteur au début de l'étude.

Pour tout entier naturel n non nul, u_n désigne le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, au bout de la n -ième année. Ainsi, on a

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = 0,8u_n + c.$$

Partie A

On suppose dans cette partie seulement que $c = 1$.

1. Conjecturer la monotonie et la limite de la suite (u_n) .
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n = 5 - 4 \times 0,8^n$.
3. Vérifier les deux conjectures établies à la question 1. en justifiant votre réponse.
Interpréter ces deux résultats.

Partie B

L'apiculteur souhaite que le nombre d'abeilles tende vers 100 000.

On cherche à déterminer la valeur de c qui permet d'atteindre cet objectif.

On définit la suite (v_n) par, pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 5c$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. En déduire une expression du terme général de la suite (v_n) en fonction de n .
3. Déterminer la valeur de c pour que l'apiculteur atteigne son objectif.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 & \text{et, pour tout entier naturel } n, \\ u_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n+4}\right) u_n. \end{cases}$$

On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n , $v_n = (n+1)u_n$.

1. La feuille de calcul ci-contre présente les valeurs des premiers termes des suites (u_n) et (v_n) , arrondies au cent-millième.

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	0	1,000 00	1,000 00
3	1	0,250 00	0,500 00
4	2	0,083 33	0,250 00
5	3	0,031 25	0,125 00
6	4	0,012 50	0,062 50
7	5	0,005 21	0,031 25
8	6	0,002 23	0,015 63
9	7	0,000 98	0,007 81
10	8	0,000 43	0,003 91
11	9	0,000 20	0,001 95

Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) ?

2. **a.** Conjecturer l'expression de v_n en fonction de n .
b. Démontrer cette conjecture.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Exercice 3

Un volume constant de $2\,200\text{ m}^3$ d'eau est réparti entre deux bassins A et B.

Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de pompes.

On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- au départ, le bassin A contient 800 m^3 d'eau et le bassin B contient $1\,400\text{ m}^3$ d'eau ;
- tous les jours, 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B au début de la journée est transféré vers le bassin A ;
- tous les jours, 10 % du volume d'eau présent dans le bassin A au début de la journée est transféré vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n , on note :

- a_n le volume d'eau, exprimé en m^3 , contenu dans le bassin A à la fin du n -ième jour de fonctionnement ;
- b_n le volume d'eau, exprimé en m^3 , contenu dans le bassin B à la fin du n -ième jour de fonctionnement.

On a donc $a_0 = 800$ et $b_0 = 1\,400$.

1. Par quelle relation entre a_n et b_n traduit-on la conservation du volume total d'eau du circuit ?
2. Justifier que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 330$.
3. L'algorithme ci-dessous permet de déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle a_n est supérieur ou égal à 1 100.

Recopier cet algorithme en complétant les parties manquantes.

```
n ← 0
a ← 800
Tant que a < 1100, faire :
    | a ← .....
    | n ← .....
Fin Tant que
```

4. Pour tout entier naturel n , on note $u_n = a_n - 1\,320$.
 - a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - b. Exprimer u_n en fonction de n .

En déduire que, pour tout entier naturel n , $a_n = 1\,320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

5. On cherche à savoir si, un jour donné, les deux bassins peuvent avoir, au mètre cube près, le même volume d'eau.

Proposer une méthode pour répondre à ce questionnement.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

