# MATHEMATIQUES
## Suites. Limites de suites : entraînement savoir-faire (corrigé)

## Exercice 1

**1.** $3n+6>10000$ équivaut à $n>\dfrac{9994}{3}$.

En prenant $n_0 = E\left(\dfrac{9994}{3}\right)+1 = 3332$,

on a pour $n \geqslant n_0$, $u_n > 10000$.

**Explication**

$n_0$ est le plus petit entier naturel supérieur à $\dfrac{9994}{3}$.
Ici, $\mathrm{E}\left(\dfrac{9994}{3}\right)$ désigne la partie entière de $\dfrac{9994}{3}$.

**2.** Soit $A$ un réel.
Il faut montrer qu'il existe un rang $n_0$ tel que si $n \geqslant n_0$, alors $u_n > A$.

- Si $A<0$, alors $n_0=0$ convient car $3n+6>0>A$.
- Si $A \leqslant 0$, l'inégalité $3n+6>A$ équivaut à $n>\dfrac{A-6}{3}$.

Donc en notant $n_0$ le plus petit entier naturel supérieur à $\dfrac{A-6}{3}$, on a :

$$\text{Si } n \geqslant n_0,\ u_n > A$$

Cela prouve que la suite $(u_n)$ diverge vers $+\infty$.

## Exercice 2

Soit $A$ un réel.

- Si $A<0$ alors $u_n=\sqrt{n}>A$ quel que soit le rang $n \in \mathbb{N}$.
- Si $A \geqslant 0$ alors $u_n=\sqrt{n}>A$ pour tout $n>A^2$. Il suffit de prendre pour $n_0$ l'entier naturel immédiatement supérieur à $A^2$.

Ainsi, quel que soit le réel $A$, on a $u_n>A$ à partir d'un certain rang : on vient de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$.

## Exercice 3

Soit $I$ un intervalle ouvert contenant 1 : un tel intervalle est de la forme $]1-r, 1+r'[$ avec $r>0$ et $r'>0$.
Il s'agit donc de montrer que l'on a $1-r<\dfrac{n+1}{n}<1+r'$, c'est-à-dire $1-r-\dfrac{n+1}{n}<0$ **et** $1+r'-\dfrac{n+1}{n}>0$, à partir d'un certain rang.

- $1-r-\dfrac{n+1}{n}=\dfrac{n-nr-n-1}{n}=\dfrac{-nr-1}{n}<0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ car $r>0$ et $n>0$.
- $1+r'-\dfrac{n+1}{n}=\dfrac{n+nr'-n-1}{n}=\dfrac{nr'-1}{n}$ est du signe de $nr'-1$ car $n>0$.

Résolvons donc $nr'-1>0 \Leftrightarrow nr'>1 \Leftrightarrow n>\dfrac{1}{r'}$ car $r'>0$ : on vient de montrer que $1+r'-\dfrac{n+1}{n}>0$ pour tout $n>\dfrac{1}{r'}$ donc à partir du rang $E\left(\dfrac{1}{r'}\right)+1$.

On vient de montrer que, quel que soit l'intervalle ouvert $I$ contenant 1, on a $\dfrac{n+1}{n} \in I$ à partir d'un certain rang : autrement dit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$.

## Exercice 4

**1.**
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 4 = 4$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 4n^2 = +\infty$ par produit de limites
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ car $3 > 1$

Par somme et différence de limites, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} 4n^2 - \dfrac{1}{n} + 3^n = +\infty$.

On peut aussi présenter les calculs comme cela :

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} 4 = 4 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \end{array}\right\} \text{Par produit, } \lim\limits_{n\to+\infty} 4n^2 = +\infty \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty \end{array}\right\} \text{Par somme, } \lim\limits_{n\to+\infty} 4n^2 - \dfrac{1}{n} + 3^n = +\infty.$$

**2.** Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} -2n^2 = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, on est en présence d'une forme indéterminée.

Pour lever cette indétermination, on factorise par $n^2$ :

$$-2n^2 + n = n^2\left(-2 + \frac{1}{n}\right) \text{ puis } \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} -2 + \dfrac{1}{n} = -2 \end{array}\right\} \text{Par produit, } \lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(-2 + \frac{1}{n}\right) = -\infty.$$

Ainsi, $= \lim\limits_{n\to+\infty} -2n^2 + n = -\infty$.

**3.** C'est une forme indéterminée donc on factorise le numérateur par $n^3$ et le dénominateur par $n^4$ :

> **Toujours !**
> On factorise toujours par les termes dominants. Faites attention aux erreurs de calculs. Soyez prudent.

$$\frac{2n^3+3}{5n^4+8n^2-n} = \frac{n^3\left(2+\dfrac{3}{n^3}\right)}{n^4\left(5+\dfrac{8}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}\right)} \underbrace{=}_{\substack{\text{On} \\ \text{simplifie}}} \frac{2+\dfrac{3}{n^3}}{n\left(5+\dfrac{8}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}\right)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 5 + \dfrac{8}{n^2} - \dfrac{1}{n^3} = 5 \end{array}\right\} \text{Par produit, } \lim\limits_{n\to+\infty} n\left(5+\frac{8}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right) = +\infty.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \dfrac{3}{n^3} = 2 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n\left(5+\dfrac{8}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}\right) = +\infty \end{array}\right\} \text{Par quotient, } \frac{2+\dfrac{3}{n^3}}{n\left(5+\dfrac{8}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}\right)} = 0.$$

Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^3+3}{5n^4+8n^2-n} = 0$.

# Exercice 5

**1.** On a :

$$\begin{array}{rcll} -1 \leqslant & (-1)^n & \leqslant 1 & \\ 1 \geqslant & -(-1)^n & \geqslant -1 & \text{On multiplie par } -1. \\ n^2+1 \geqslant & n^2-(-1)^n & \geqslant n^2-1 & \text{On ajoute } n^2. \end{array}$$

**Pas grave**

Seule sert l'inégalité $n^2-1 \leqslant n^2-(-1)^n$.... pas grave.....

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-(-1)^n = +\infty$ par le théorème de comparaison.

**2.** Pour tout entier $n$ non nul :

**Méthode**

D'une manière générale, quand le terme général d'une suite fait apparaître un cosinus, un sinus ou $(-1)^n$, on commence par les encadrer par $-1$ et $1$ (on n'utilisera qu'un membre de l'encadrement si on applique le théorème de comparaison).

$$\begin{array}{rcll} -1 \leqslant & \sin(n^2) & \leqslant 1 & \\ \dfrac{-1}{n} \leqslant & \dfrac{\sin(n^2)}{n} & \leqslant \dfrac{1}{n} & \text{On divise } n \neq 0. \end{array}$$

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(n^2)}{n} = 0$ par le théorème des gendarmes.

# Exercice 6

On veut montrer que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Considérons la propriété : « $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ ».
- Initialisation :
  Pour $n=0$, on a $u_0 = 4$ et $u_1 = 2$ donc $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0$ : la propriété est vraie au rang 0.
- Hérédité : On va montrer que si la propriété est vraie à un certain rang $n \geqslant 0$ alors elle est vraie au rang $n+1$. Supposons donc que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
  Comme la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit :
  $\sqrt{1} \leqslant \sqrt{u_{n+1}} \leqslant \sqrt{u_n}$, c'est-à-dire $1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$ : la propriété est vraie au rang $n+1$.
- La propriété est vraie pour $n=0$ et est héréditaire donc $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on déduit que $(u_n)$ est décroissante et de $1 \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on déduit que $(u_n)$ est minorée : $(u_n)$ est décroissante et minorée, elle est convergente.

# Exercice 7

- $0 < \dfrac{3}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$, par différence $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
- $-1 < -0,8 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (-0,8)^n = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} 3+2\times(-0,8)^n = 3 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 4 = 4 \end{array}\right\} \text{Par quotient, } \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{3+2\times(-0,8)^n} = \frac{4}{3}.$$

- $\lim_{n\to+\infty} 1,7^n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} 0,9^{n+1} = 0$. On est donc en présence d'une forme indéterminée du type « $0 \times \infty$ ».
  Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

  $$\begin{aligned} w_n &= -2 \times 1,7^n \times 0,9^{n+1} \\ &= -2 \times 1,7^n \times 0,9^n \times 0,9 \\ &= -1,8 \times (1,7 \times 0,9)^n \\ &= -1,8 \times 1,53^n \end{aligned}$$

  **Technique**
  Pour lever l'indétermination, on utilise l'égalité $0,9^{n+1} = 0,9^n \times 0,9$, ce qui permet de réduire $1,7^n \times 0,9^n$. Joli, non ?

  $1,53 > 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} 1,53^n = +\infty$ et donc, par produit, $\lim_{n\to+\infty} w_n = -\infty$ car $-1,8 < 0$.
- $-1,3 < -1$ donc la suite $((-1,3)^n)$ diverge et donc la suite $(t_n)$ également.

# Exercice 8

**1.** Tableau complété :

| $N$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $U$ | 80 | 90 | 97,5 | 103,125 | 107,344 | 110,508 | 112,881 | 114,661 |
| $U \leqslant 114$ | Vrai | Vrai | Vrai | Vrai | Vrai | Vrai | Vrai | Faux |

**2.** Le nombre dans la variable $N$ à la fin de cet algorithme est $2015 + 7 = 2022$.