MATHEMATIQUES
Suites arithmétiques et géométriques : QCM (corrigé)

Exercice 1

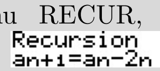
1. Calcul de u_1 et u_2 :

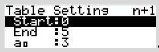
$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 - 2\times 0 \\ &= 3 - 0 \\ &= 3 \end{aligned}$$

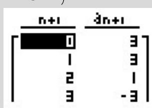
Le principe

Ecrivez la relation de récurrence et remplacez n par 0 puis par 1. Vous obtenez $u_{0+1} = u_0 - 2\times 0$, puis $u_{1+1} = u_1 - 2\times 1$.

Calculatrice

Dans le menu RECUR, on choisit le type F2, on entre 

, puis dans le SETUP, 

, on obtient alors le tableau


2.

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 - 2\times 1 \\ &= 3 - 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Réponse : b. et d.

$$\left.\begin{aligned} u_1 - u_0 = 3 - 3 = 0 \\ u_2 - u_1 = 1 - 3 = -2 \end{aligned}\right\} \text{ Ainsi, } u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$$

La suite n'est donc pas arithmétique.

$$\left.\begin{aligned} \frac{u_1}{u_0} = \frac{3}{3} = 1 \\ \frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{3} \end{aligned}\right\} \text{ Ainsi, } \frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$$

La suite n'est donc pas géométrique.

Pas arithmétique

Pour montrer qu'une suite n'est pas arithmétique, il suffit de montrer que la différence entre deux termes consécutifs n'est pas la même.

Pas géométrique

Pour montrer qu'une suite n'est pas géométrique, il suffit de montrer que le quotient entre deux termes consécutifs n'est pas le même.

Réponse : c.

Exercice 2

1. L'égalité $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \sqrt{2}$ s'écrit $v_{n+1} = \sqrt{2}\times v_n$.
Ainsi v est une suite géométrique.

Autre rédaction possible

Comme pour tout entier naturel n, le quotient $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ est constant égal à $\sqrt{2}$, alors v est géométrique.

Réponse : b.

2. La relation donnée permet d'obtenir v_{n+1} en fonction de v_n. De plus on a la donnée du premier terme donc cette suite est définie par une relation de récurrence.
Réponse : b.

3. On reconnaît une suite géométrique de premier terme $v_0 = -3$ et de raison $q = \sqrt{2}$, ainsi :

$$v_n = v_0 \times q^n = -3\times(\sqrt{2})^n$$

Réponse : c.

Exercice 3

1. • Cette suite est définie de manière explicite (on a u_n en fonction de n).

• $w_0 = \dfrac{0^2+3}{0+1} = 3$, $w_1 = \dfrac{1^2+3}{1+1} = 2$, $w_2 = \dfrac{2^2+3}{2+1} = \dfrac{7}{3}$.

$$\left.\begin{array}{l} w_1 - w_0 = 2 - 3 = -1 \\ w_2 - w_1 = \dfrac{7}{3} - 2 = \dfrac{1}{3} \end{array}\right\} \text{ Ainsi, } w_1 - w_0 \neq w_2 - w_1$$

La suite n'est donc pas arithmétique.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{w_1}{w_0} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{w_2}{w_1} = \dfrac{7}{3} \div 2 = \dfrac{7}{6} \end{array}\right\} \text{ Ainsi, } \dfrac{w_1}{w_0} \neq \dfrac{w_2}{w_1}$$

La suite n'est donc pas géométrique.

Réponse : b.

2.

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \frac{(n+1)^2+3}{(n+1)+1} \\ &= \frac{n^2+2n+1+3}{n+2} \quad \text{Attention à l'égalité remarquable.} \\ &= \frac{n^2+2n+4}{n+2} \end{aligned}$$

De plus,

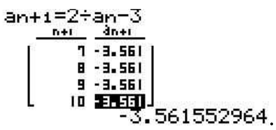
$$\begin{aligned} n+2-\frac{2n}{n+2} &= \frac{(n+2)(n+2)}{n+2} - \frac{2n}{n+2} \quad \text{Mise au même dénominateur.} \\ &= \frac{(n+2)^2-2n}{n+2} \\ &= \frac{n^2+4n+4-2n}{n+2} \\ &= \frac{n^2+2n+4}{n+2} \\ &= w_{n+1} \quad \text{D'après le résultat précédent.} \end{aligned}$$

Réponse : b. et c.

Exercice 4

• Cette suite est définie par récurrence.

• En utilisant la calculatrice, on obtient :



Attention

Vous devez positionner votre curseur sur la valeur pour bien voir que la valeur $-3,561$ n'est pas une valeur exacte.

Ainsi, $u_{10} \simeq -3,56155$.

• $u_0 = 2$ et $u_1 = -2$.

Calculatrice

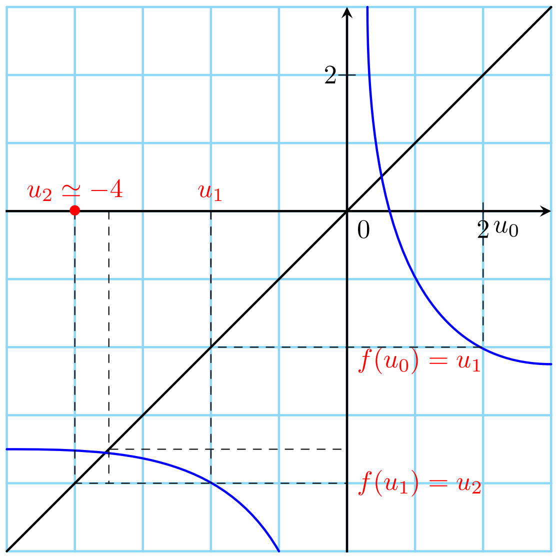
J'ai obtenu u_0 et u_1 en utilisant la calculatrice.

Ainsi, $u_1 - u_0 = -4$, donc la suite n'est pas arithmétique de raison -3.

- Aucun terme de cette suite ne sera nul. Faites-moi confiance. Je vous le montre l'année prochaine !

Réponse : b.

Exercice 5



Réponse : b.

Exercice 6

- La suite proposée en a. est arithmétique de raison -5.

- Comme la suite est arithmétique de raison 5, on passe de u_4 à u_9 en ajoutant 5 fois la raison, soit $5 \times 5 = 25$.
Ainsi, $u_9 = u_5 + 25$.

Plus général

Pour une suite u arithmétique de raison r, on a pour tout entier naturel p et n, $u_n = u_p + (n-p)r$. On applique ce résultat avec $n = 9$ et $p = 4$ et on obtient :

$$u_9 = u_4 + 5r = u_4 + 25$$

- La suite u est arithmétique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison $r = 5$, on en déduit $u_n = -3 + 5n$.

Forme explicite

Pour une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, la forme explicite est donnée par

$$u_n = u_0 + nr$$

- Calcul de la somme :

$$\begin{aligned} u_0+u_1+.....+u_{26} &= -3+(-3+5)+(-3+2\times 5)+......+(-3+26\times 5) \\ &= \underbrace{(-3+(-3)+.....+(-3))}_{=27\times(-3)}+5\times(1+2+ \\ &= -3\times 27+5\times\frac{26\times 27}{2} \\ &= -81+1755 \\ &= 1674 \end{aligned}$$

Somme

N'oubliez pas :

$$1+2+3+......+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Autre façon de faire

On utilise le résultat suivant :
La somme S de plusieurs termes consécutifs d'une suite arithmétique est telle que :

$$S=(\text{nombre de termes})\times\frac{\text{premier terme } + \text{ dernier terme}}{2}$$

Dans notre cas, le premier terme est $u_0=-3$, le dernier terme est obtenu grâce à la formule $u_n=u_0+nr$ soit $u_{26}=-3+26\times 5=127$.
Comme il y a 27 termes dans cette somme, on obtient : $27\times\frac{-3+127}{2}=1674$.

Réponse : a. c. d.

Exercice 7

- La suite proposée en a. convient par définition.

- Comme la suite est géométrique de raison 4, on passe de u_4 à u_9 en multipliant 5 fois la raison, soit en multipliant par $4^5=1024$. Ainsi, $u_9=1024\times u_5$.

Plus général

Pour une suite v géométrique de raison q, on a pour tout entier naturel p et n, $v_n=v_p\times q^{n-p}$. On applique ce résultat avec $n=9$ et $p=4$ et on obtient :

$$v_9=v_4\times q^5=v_4\times 1024$$

- La suite v est géométrique de premier terme $v_0=7$ et de raison $q=4$, on en déduit $v_n=7\times 4^n$.

Forme explicite

Pour une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q, la forme explicite est donnée par

$$v_n=v_0\times q^n$$

- Calcul de la somme :

$$\begin{aligned} v_0+v_1+.....+v_{10} &= 7+(7\times 4)+(7\times 4^2)+......+(7\times 4^{10}) \\ &= 7(1+4+4^2+.......+4^{10}) \\ &= 7\times\frac{1-4^{11}}{1-4} \\ &= 9786707 \end{aligned}$$

Somme

N'oubliez pas :

$$1+q+q^2+......+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Autre façon de faire

On utilise le résultat suivant :
Soit q un nombre réel avec $q\neq 0$ et $q\neq 1$. La somme S de plusieurs termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q est telle que :

$$S=(1^{\text{er}}\text{ terme})\times\frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$$

Dans notre cas, le premier terme est $v_0=-7$ et la raison est $q=4$. Comme il y a 11 termes dans cette somme, on obtient : $7\times\frac{1-4^{11}}{1-4}=9786707$.

Réponse : a.

Exercice 8

- $S_2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{3}\right)^i = \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$.

- La proposition b. est incorrecte car $S_n = \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{3}\right)^n$
- On regarde pour l'affirmation c.

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^i \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{3}\right)^n \\
&= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)
\end{aligned}$$

Autrement

En remplaçant n par 2 dans l'expression proposée on ne trouve pas le même résultat. Ainsi on peut conclure sans trop d'effort que l'expression proposée ne convient pas.

Réponse : a.

Exercice 9

1. p_1 est la probabilité que le renard soit venu le 1^er jour. Or, le renard est venu aujourd'hui, donc $p_1 = 1$.

Réponse : b.

2. Les probabilités $\frac{1}{3}$ et $\frac{11}{12}$ sont des probabilités du deuxième niveau de l'arbre. Ce sont des probabilités conditionnelles.
On a de plus, $p(R_n) = p_n$ et par conséquent $p(\overline{R_n}) = 1 - p_n$.

L'arbre qui décrit la situation est celui présenté en a.

Réponse : a.

3. $p_{n+1} = p(R_{n+1})$.
Comme R_n et $\overline{R_n}$ forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales : :

$$\begin{aligned}
p(R_{n+1}) &= p(R_n \cap R_{n+1}) + p(R_n \cap \overline{R_{n+1}}) \\
&= p(R_n) \times P_{R_n}(R_{n+1}) + p(\overline{R_n}) \times P_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) \\
&= p_n \times \frac{1}{3} + (1 - p_n) \times \frac{11}{12} \quad \text{Réponse c.} \\
&= \frac{1}{3}p_n + \frac{11}{12} - \frac{11}{12}p_n \\
&= \frac{4}{12}p_n - \frac{11}{12}p_n + \frac{11}{12} \\
&= -\frac{7}{12}p_n + \frac{11}{12} \quad \text{Réponse d.}
\end{aligned}$$

Réponse : c. d.

4. Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{11}{19} \\
&= -\frac{7}{12}p_n + \frac{11}{12} - \frac{11}{19} \quad \text{On remplace } p_{n+1} \text{ par } -\frac{7}{12}p_n + \frac{11}{12} \\
&= -\frac{7}{12}p_n + \frac{77}{228} \quad \text{On réduit (utilisez votre calculatrice !)} \\
&= -\frac{7}{12}\underbrace{(u_n + \frac{11}{19})}_{p_n} + \frac{77}{228} \quad \text{On remplace } p_n \text{ par } u_n + \frac{11}{19}. \\
&= -\frac{7}{12}u_n - \cancel{\frac{77}{228}} + \cancel{\frac{77}{228}} \quad \text{On développe et réduit.} \\
&= -\frac{7}{12}u_n \quad \text{On obtient la forme souhaitée : } q \times u_n
\end{aligned}$$

Explications

• N'oubliez pas le résultat que vous voulez atteindre. Je vous conseille même de l'écrire dans un coin.... (on veut obtenir $u_{n+1} = q \times u_n$ et on peut facilement "deviner" quelle sera la valeur de q....

• On exprime p_n en fonction de u_n en utilisant l'égalité : $u_n = p_n - \frac{11}{19}$.

On obtient : $p_n = u_n + \frac{11}{19}$.

Cette dernière égalité montre que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{7}{12}$.

Réponse : f.