MATHEMATIQUES
Fonction logarithme népérien : entraînement 1 (corrigé)

Exercice 1

Partie A

1. On résout l'équation pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rrcl} & f(x) & = & x \\ \Longleftrightarrow & x - \ln(x^2+1) & = & x \\ \Longleftrightarrow & \ln(x^2+1) & = & \ln(\mathrm{e}^0) \\ \Longleftrightarrow & x^2+1 & = & \mathrm{e}^0 \\ \Longleftrightarrow & x^2 & = & 0 \\ \Longleftrightarrow & x & = & 0 \end{array}$$

La méthode

On se ramène à des équations du type $\ln X = \ln Y$ qui est équivalente à $X = Y$.

L'équation $f(x) = x$ admet 0 pour unique solution.

2. • Montrons que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:
La fonction $u : x \mapsto x^2+1$ est une fonction trinôme, donc dérivable là où elle est définie, soit $\mathbb{R}$.
Puisque $u > 0$ sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $\ln u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Finalement, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto -\ln(x^2+1)$, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout nombre réel x, on a :

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & 1 - \overbrace{\dfrac{2x}{x^2+1}}^{\substack{\text{Dérivée de} \\ x \mapsto \ln(x^2+1)}} \\ & = & \dfrac{x^2+1}{x^2+1} \quad \text{Mise au même dénominateur.} \\ & = & \dfrac{x^2+1-2x}{x^2+1} \\ & = & \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1} \end{array}$$

Dérivée

$\ln' u = \dfrac{u'}{u}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$, *sauf pour* $x = 1$.

On en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

• Montrons $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$:

De $\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} x^2+1 = +\infty \\ \text{et} \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty \end{array} \right.$ on déduit, par composition : $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$.

Il vient ensuite, par produit :

$$\lim_{x \to -\infty} -\ln(x^2+1) = -\infty$$

De $\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} -\ln(x^2+1) = -\infty \end{array} \right.$ on déduit, par somme : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

3. La fonction f est (strictement) croissante sur $[0\ ;\ 1]$. Par suite :

$$\forall x \in [0,1], \qquad f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$$

Fonction croissante

Une fonction croissante conserve l'ordre.

On a $\begin{cases} f(0) = 0 - \ln(0^2+1) = 0 \\ \text{et} \\ f(1) = 1 - \ln(1^2+1) = 1 - \ln 2 \end{cases}$.

Ainsi,

$$\forall x \in [0,1], \qquad 0 \leqslant f(x) < 1 - \ln 2$$

Puisque $1 - \ln 2 < 1$, alors :

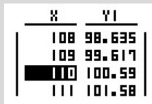
$$\forall x \in [0,1], \qquad 0 \leqslant f(x) < 1$$

4. a. L'algorithme permet d'obtenir la plus petite valeur de N pour laquelle $N - \ln(N^2+1)$ est supérieur ou égal à A.

b. Lorsque $A = 100$, à la fin de l'exécution de l'algorithme la valeur de N est 110.

Calculatrice

C'est la calculatrice qui permet d'obtenir ce résultat (menu TABLE) :



Partie B

1. Pour tout entier naturel n, notons $\mathcal{P}_n$ la propriété : $u_n \in [0\ ;\ 1]$.

- Puisque $u_0 = 1$, $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- Supposons vraie la propriété $\mathcal{P}_n$ pour *un* entier naturel n.

On a alors : $u_n \in [0\ ;\ 1]$.

D'après la troisième question de la partie **A.**, on en déduit :

$$f(u_n) \in [0\ ;\ 1]$$

Principe

C'est la fonction f qui permet de passer de u_n à u_{n+1}. En effet, on a $u_{n+1} = f(u_n)$.
Donc, pensez à utiliser les résultats de la partie **A.**

soit :

$$u_{n+1} \in [0\ ;\ 1]$$

On a prouvé :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{P}_n \text{ est vraie} \Longrightarrow \mathcal{P}_{n+1} \text{ est vraie}$$

- On a prouvé par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \in [0\ ;\ 1]$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$u_{n+1} - u_n = -\ln\left(u_n^2+1\right)$.
Étudions le signe de $-\ln\left(u_n^2+1\right)$:
Puisque $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, on en déduit, la fonction carré étant croissante sur $[0,1]$:

$$0^2 \leqslant u_n^2 \leqslant 1^2$$

soit :

$$1 \leqslant u_n^2 + 1 \leqslant 2$$

Comme la fonction ln est croissante sur $[1, +\infty[$:
De $u_n^2 + 1 \geqslant 1$, on déduit $\ln(u_n^2 + 1) \geqslant \ln 1$, soit $\ln\left(u_n^2 + 1\right) \geqslant 0$.
Puisque $u_{n+1} - u_n = -\ln(u_n^2 + 1) \leqslant 0$, alors

La suite u est décroissante

3. La suite u est décroissante et minorée par 0 : elle converge donc, en vertu du théorème de la limite monotone, vers un nombre réel ℓ.

4. Puisque l'équation $f(x) = x$ admet 0 pour unique solution.

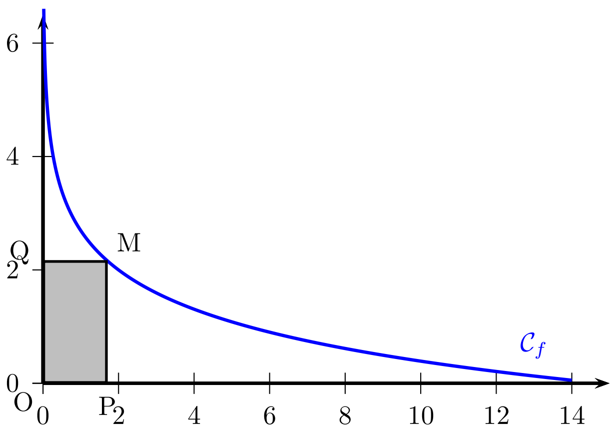
On en déduit :

$$\ell = 0$$

Encore

C'est encore un résultat de la partie **A.** qui permet de conclure ici.

Exercice 2



À tout point M appartenant à $\mathcal{C}_f$ on associe le point P projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et le point Q projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

- On prend deux positions du point M et on compare les aires des rectangles obtenus.
  - Si M est d'abscisse 2, son ordonnée est $f(2) = 2 - \ln(1) = 2$ donc l'aire du rectangle $OPMQ$ vaut 4 unités d'aire.
  - Si M est d'abscisse 4, son ordonnée est $f(4) = 2 - \ln(2)$ donc l'aire du rectangle $OPMQ$ vaut $4 - 2\ln(2)$ qui est différente de 4.

  Donc l'aire du rectangle $OPMQ$ n'est pas constante.

- Le point M a pour abscisse x et pour ordonnée $f(x)$ donc l'aire du rectangle $OPMQ$ est :

$$\mathcal{A}(x) = x \times f(x) = 2x - x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$$

Aire

Le rectangle $OPMQ$ a pour largeur x et pour longueur $f(x)$.

Étudions les variations de la fonction $\mathcal{A}$:

On remarque que $\ln\left(\frac{x}{2}\right) = \ln x - \ln 2$.

Ainsi, $x \longmapsto \ln\left(\frac{x}{2}\right)$ a pour dérivée $x \longmapsto \frac{1}{x}$.

ou

La dérivée de $x \longmapsto \ln\frac{x}{2}$ s'obtient avec la formule $\ln' u = \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = \frac{x}{2}$.
On a $u'(x) = \frac{1}{2}$ car $\frac{x}{2} = \frac{1}{2}x$ et par suite la dérivée de $x \longmapsto \ln\frac{x}{2}$ est $x \longmapsto \frac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{x} = \frac{1}{x}$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}'(x) &= 2 - \overbrace{\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right) + x \times \frac{1}{x}\right)}^{\text{Dérivée du produit : } x \longmapsto x \ln \frac{x}{2}} \\
&= 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \qquad \text{Car } x \times \frac{1}{x} = 1. \\
&= 1 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)
\end{aligned}
$$

On étudie le signe de cette dérivée :

$$
\begin{aligned}
1 - \ln\left(\frac{x}{2}\right) &> 0 \\
1 &> \ln\left(\frac{x}{2}\right) \\
\ln \mathrm{e} &> \ln\left(\frac{x}{2}\right) \\
\mathrm{e} &> \frac{x}{2} \\
2\mathrm{e} &> x
\end{aligned}
$$

Méthode

En présence d'un logarithme népérien dans la dérivée, pour en étudier son signe, on résout une inéquation (> 0 ou < 0). L'idée est de se ramener à une inéquation du type $\ln X < \ln Y$.

$\mathcal{A}(2\mathrm{e}) = 2 \times 2\mathrm{e} - 2\mathrm{e} \times \ln \dfrac{2\mathrm{e}}{2} = 2\mathrm{e}$ d'où le tableau de variation de la fonction $\mathcal{A}$:

x	0		$2\mathrm{e}$		14
$\mathcal{A}'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$\mathcal{A}(x)$	‖	↗	$2\mathrm{e}$	↘	

$f(2\mathrm{e}) = 2 - \ln \dfrac{2\mathrm{e}}{2} = 2 - 1 = 1$. donc l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale pour le point M de coordonnées $(2\mathrm{e}\,;\,1)$.